ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Об проксиминальных свойствах подпространств в банаховых пространствах

Федоров Владимир Михайлович, доцент кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова

Для замкнутых подпространств $L \subset E$ бесконечной размерности $dimL = \infty$ в банаховом пространстве E, для которых факторпространство $\hat{E} \doteqdot E/L$ является сепарабельным и аннулятор $L^{\perp}$ содержит минимальное, замкнутое и тотальное подпространство, получено характеристическое свойство проксиминальности, т.е свойства существования элементов наилучшего приближения подпространством L. В качестве приложения доказывается, что в пространстве $C(T)$ непрерывных функций на связном компакте T всякое чебышевское подпространство $L \subset C(T)$ бесконечной размерности, удовлетворяющее указанным выше условиям на аннулятор $L^{\perp}$, является гиперплоскостью $L = ker\alpha$, определяемой строго положительным функционалом $\alpha \in L^{\perp}$.

Ключевые слова: *проксиминальное подпространство, чебывшевское подпространство, аннулятор, сепарабельность, размерность, коразмерность, тотальное подпространство, изометрический изоморфизм, хаусдорфовый компакт.*

About proximal properties of subspaces in Banach spaces

Fedorov V. M., Associate Professor, Mechanics and Mathematics Department
MSU

For closed subspaces L of infinite dimension $dimL = \infty$ in a Banach space E, for which the factor space $\hat{E} = E/L$ is separable and the annihilator $L^{\perp}$ contains a minimal, closed and total subspace, the characteristic property of proximinality is obtained, that is, the existence property element of the best approximation by the subspace L. As an application, it is proved that in the space $C(T)$ of continuous functions on a connected compactum T every Chebyshev subspace $L \subset C(T)$ of infinite dimension satisfying creating the above conditions on the annihilator $L^{\perp}$ is a hyperplane $L = ker\alpha$, defined by a strictly positive functional $\alpha \in L^{\perp}$.

Введение. Пусть $L \subset E$ замкнутое подпространство банахова пространства E. Обозначим через $\hat{E} \doteqdot E/L$ факторпространство смежных классов $\hat{x} = x + L$ по подпространству L и через $\|\hat{x}\| \doteqdot \inf_{z\in L}\|x + z\|$ величину расстояния от точки $x \in E$ до L, которую называют наилучшим приближением подпространством L. Подпространство $L \subset E$ называется ***проксиминальным***, если для любого $x \in E$ множество $P_L(x) \doteqdot \{y \in L | \|x - y\| = \|\hat{x}\|\}$ не пусто; ***получебышевским***, если для любого $x \in E$ множество $P_L(x)$ имеет не более одной точки; и ***чебышевским***, если для любого $x \in E$ множество $P_L(x)$ состоит ровно из одной точки.

Используя компактность конечномерного шара, можно показать, что всякое конечномерное подпространство $L \subset E$ является проксиминальным. Проблема характеристики бесконечномерных проксиминальных подпространств является достаточно трудной задачей и решена только для подпространств конечной коразмерности (см. [1, 2, 3]). Эта характеристика для подпространств конечной коразмерности в банаховом пространстве является обобщением результатов, полученных ранее для классических нормированных пространств, таких как пространство $C(T)$ непрерывных функций на хаусдорфовом компакте T, и пространство $L_1(X, \mu)$ интегрируемых функций по Лебегу на измеримом пространстве (X, μ) с σ-конечной мерой μ (см. [3, 4, 5]). Нашей задачей является нахождение необходимых и достаточных условий проксиминальности для подпространств, имеющих бесконечную размерность и коразмерность.

Основные результаты. Далее будем предполагать, что факторпространство $\hat{E} \doteqdot E/L$ является сепарабельным и аннулятор $L^{\perp} \doteqdot \{f \in E^* \,|\, f(x) = 0, x \in L\}$ имеет минимальное, замкнутое и тотальное в $\hat{E}$ подпространство. Известно, что аннулятор $L^{\perp}$ изометричен сопряженному пространству $L^{\perp} \cong \hat{E}^*$ [7, стр. 85] и замкнутый шар в $\hat{E}^*$ является слабо* компактным метрическим пространством [7, стр. 459]. Пусть $\hat{S}_r^* \doteqdot \{\alpha \in \hat{E}^* \,|\, \|\alpha\| \le r\}$ шар в $\hat{E}^*$ радиуса $r > 0$ и $\hat{S}^* \doteqdot \hat{S}_1^*$.

Говорят, что подпространство $F \subset \hat{E}^*$ тотально, если из условия $\alpha(\hat{x}) = 0$ при всех $\alpha \in F$ вытекает $\hat{x} = 0$. Тотальность $F \subset \hat{E}^*$ равносильна слабой* плотности подпространства $F \subset \hat{E}^*$ [8, стр. 198]. *Характеристикой* $\chi > 0$ подпространства F называется верхняя грань чисел $r > 0$, т.ч. слабое* замыкание $\bar{T}$ множества $T \doteqdot F \cap \hat{S}^*$ содержит шар $\hat{S}_r^* \subset \bar{T}$ [8, стр. 275]. Далее считаем $F \subset \hat{E}^*$ замкнутым и тотальным подпространством положительной характеристики.

Лемма 1. *Если аннулятор $L^{\perp}$ содержит минимальное замкнутое тотальное подпространство F положительной характеристики, то для любого $\alpha \in L^{\perp}$ он будет содержать минимальное замкнутое тотальное подпространство F_1 положительной характеристики, т.ч. $\alpha \in F_1$.*

Доказательство. Известно [8 , стр. 275], что пространство $\hat{E}$ тогда и только тогда изоморфно сопряженному пространству F^*, когда $F \subset \hat{E}^*$ минимальное, замкнутое и тотальное в $\hat{E}$ подпространство положительной характеристики. Изоморфизм $\hat{J}: \hat{E} \to F^*$ будет каноническим, т.е. задается формулой $\hat{J}(\hat{x}) \doteqdot \delta_{\hat{x}}|_F$, определяющей сужение функционала Дирака $\delta_{\hat{x}} \in \hat{E}^{**}$ на подпространство F. В таком случае, пространство $\hat{E}^{**} \simeq F^* \oplus F^\perp$ изоморфно прямой сумме F^* и $F^\perp$.

Пусть $\alpha \in \hat{E}^* \backslash F$. Рассмотрим ненулевой функционал $f \in \hat{E}^{**} \backslash (F^* \cup F^\perp)$, не принадлежащий аннулятору $F^\perp$ и образу F^* канонического вложения $J: \hat{E} \to \hat{E}^{**}$. Тогда линейная оболочка $F_1 \doteqdot \mathrm{sp}\{\alpha, \ker f \cap F\}$ задает такое подпространство $\hat{E}^*$, которое содержит α и его аннулятор в $\hat{E}$ равен нулю. Так как $F^* \cap F_1^\perp = 0$, то $\hat{E}^{**} \simeq F^* \oplus F_1^\perp$. Таким образом, $F_1 \subset \hat{E}^*$ минимальное, замкнутое и тотальное в $\hat{E}$ подпространством положительной характеристики [8, стр. 275].

Обозначим через $C(T)$ пространство непрерывных и ограниченных функций на множестве T и определим отображение $\Phi: E \to C(T)$ по формуле $\Phi(x) \doteqdot \varphi$, где $x \in E$ и $\varphi(t) \doteqdot t(x)$ при всех $t \in T$. Рассмотрим образ оператора $\Phi(E) \doteqdot M$. Поскольку множество $B \doteqdot \Phi(S)$ выпукло, симметрично и поглощает M, где S единичный шар в E, то функционал Минковского $\|\varphi\| \doteqdot \inf\{\lambda > 0 \mid \varphi \in \lambda B\}$ задает норму в подпространстве M. При этом $\|\varphi\|_C \doteqdot \sup_{t\in T}|\varphi(t)| \le \|\varphi\|$.

Лемма 2. *Отображение $\Phi: E \to C(T)$ задает слабо компактный оператор, а его факторотображение $\hat{\Phi}: \hat{E} \to M$ является изометрическим оператором, при этом норма M эквивалентна индуцированной норме из пространства $C(T)$.*

Доказательство. Поскольку $\|\Phi(x)\|_C \le \|x\|$, то оператор Φ ограничен в E. Пусть $\Phi^{**}: E^{**} \to C^{**}(T)$ обозначает его второй сопряженный оператор. Тогда, если $f \in E^{**}$, то существует сеть $\{x_i\}_{i\in I}$, т.ч. $\delta_{x_i} \to f$ сходится слабо* [7, стр. 460]. Поэтому в силу слабой* непрерывности оператора Φ^{**}[7, стр. 515] мы имеем

$\Phi^{**}(f) = \lim_{i\in I} \Phi^{**}(\delta_{x_i}) = \lim_{i\in I} \delta_{\Phi(x_i)} = \lim_{i\in I} \delta_{\varphi_i} = \delta_{f|_T}$,

где $\Phi(x_i) = \varphi_i$ и $\varphi_i(t) = t(x_i) \to f(t)$ сходится при всех $t \in T$, т.е. $\lim_{i\in I} \varphi_i = f|_T$. Здесь, как обычно, символ $\delta_x \in E^{**}$ обозначает функционал Дирака, заданный по формуле $\delta_x(\alpha) \doteqdot \alpha(x)$ на сопряженном пространстве E^*.

Следовательно, поскольку единичный шар $S^{**} \subset E^{**}$ слабо* компактный, то его образ $\Phi^{**}(S^{**})$ будет слабо* компактным в пространстве $C^{**}(T)$. Применяя формулу $\Phi^{**}J = J\Phi$ [8, стр. 516] и слабую* плотность множества $J(S) \subset S^{**}$, где $J(x) \doteqdot \delta_x$ является каноническим вложением $J: E \to E^{**}$ во второе сопряженное пространство E^{**}, мы получим, что множество $\Phi(S) \subset C(T)$ будет относительно слабо компактным. Таким образом, оператор Φ является слабо компактным.

Если $x \in E$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in M$, т.ч. $\|x - y\| < \|\hat{x}\| + \varepsilon$. Поэтому $\Phi(x) = (\|\hat{x}\| + \varepsilon)\,\Phi\left(\frac{x-y}{\|\hat{x}\|+\varepsilon}\right) \in (\|\hat{x}\| + \varepsilon)B$ и значит $\|\Phi(x)\| \le \|\hat{x}\|$.

С другой стороны, пусть $\Phi(x) \in \lambda B$, где $\lambda > 0$. Тогда найдется $y \in S$, т.ч. $\Phi(x) = \lambda\Phi(y)$. Тогда в силу тотальности подпространства $F \subset \hat{E}^*$ мы получим включение $z \doteqdot x - \lambda y \in L$ и, следовательно, $\|\hat{x}\| \le \|x - z\| = \|\lambda y\| \le \lambda$, т.е. $\|\hat{x}\| \le \|\Phi(x)\|$. Таким образом, имеет место равенство $\|\hat{\Phi}(\hat{x})\| = \|\hat{x}\|$.

Поскольку норма пространства M совпадает с нормой пространства $\hat{E}$ и при любом $0 < r < \chi$ выполняются включение $\hat{S}_r^* \subset \bar{T}$, то имеют место неравенства $\|\hat{\Phi}(\hat{x})\|_C \le \|\hat{x}\| = \sup_{t\in\hat{S}^*}|t(\hat{x})| = \frac{1}{r}\sup_{t\in\hat{S}_r^*}|t(\hat{x})| \le \frac{1}{r}\sup_{t\in\bar{T}}|t(\hat{x})| = \frac{1}{r}\|\hat{\Phi}(\hat{x})\|_C$.

Поэтому норма в M эквивалентна индуцированной норме из $C(T)$.

Замечание. Выполняя композицию сопряженного отображения $\hat{\Phi}^*: M^* \to \hat{E}^*$ и естественной изометрии $\hat{E}^* \to L^\perp$, получим изометрию $M^* \to L^\perp$ по формуле $\alpha(x) = \alpha(\hat{x}) = \hat{\Phi}^*\mu(\hat{x}) = \mu\left(\hat{\Phi}(\hat{x})\right) = \mu(\Phi(x))$, где $x \in E$, $\alpha \in L^\perp$ и $\mu \in M^*$. Это замечание позволяет напрямую доказать изометрию $\hat{\Phi}^*: M^* \to \hat{E}^*$. В самом деле, имеем $\|\alpha\| = \sup_{x\in S}|\alpha(x)| = \sup_{x\in S}|\mu(\Phi(x))| = \sup_{\varphi\in B}|\mu(\varphi)| = \sup_{\varphi\in\bar{B}}|\mu(\varphi)| = \|\mu\|$.

Теорема 1. *Если $L \subset E$ задает замкнутое подпространство бесконечной размерности $\dim L = \infty$ и $\dim L^\perp > 1$, то следующие условия эквивалентны:*

a) подпространство L проксиминально в пространстве E;

b) множество $B \subset M$ замкнуто в пространстве M для всякого замкнутого и тотального подпространства $F \subset L^\perp$ положительной характеристики;

c) множество $B \subset M$ секвенциально полно в слабой топологии $\sigma(M, N)$ для всякого минимального, замкнутого и тотального подпространства $F \subset L^\perp$ положительной характеристики;

d) множество $B \subset M$ секвенциально компактно в слабой топологии $\sigma(M, N)$ для всякого минимального, замкнутого и тотального подпространства $F \subset L^\perp$ положительной характеристики;

e) всякий ненулевой функционал $\alpha \in N$ является опорным и, если $\alpha \in N$ и $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset B$, т.ч. $\lim_{n\to\infty} \alpha(\varphi_n) = \|\alpha\|$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} \beta(\varphi_n) \le \sup_{\psi\in\Xi(\alpha)}|\beta(\psi)|$ при $\beta \in N$ и для любого минимального, замкнутого и тотального подпространства $F \subset L^\perp$ положительной характеристики. Здесь $N \subset M^*$ обозначает подпространство, т.ч. $\Phi^*(N) = F$, а $\Xi(\alpha) \doteqdot \{\varphi \in B \mid \alpha(\varphi) = \|\alpha\|\}$ экстремальное множество.

Доказательство. Покажем, что из условия a) следует b). Предположим, что $\Phi(x) = \varphi \in \bar{B} \backslash B$, где замыкание $\bar{B}$ берется в пространстве M. Тогда по лемме 1 получим $\|\hat{x}\| \le 1$ и не существует $y \in S$, т.ч. $\Phi(y) = \Phi(x)$. Поскольку в силу тотальности подпространства F в пространстве $\hat{E}$ это равенство $\Phi(y) = \Phi(x)$ равносильно включению $x - y \in L$, то для любого $z \in L$ мы получим $x - z \notin S$. Поэтому $\|x - z\| > 1 \ge \|\hat{x}\|$, т.е. $P_L(x) = \emptyset$, что противоречит условию a).

Покажем, что из b) следует a). Пусть $x \in E$ и $\|\hat{x}\| = 1$. Тогда по лемме 1 и по условию b) получим $\Phi(x) = \varphi \in B = \bar{B}$. Следовательно, существует $y \in S$, т.ч. $\Phi(x) = \Phi(y)$. Поэтому в силу тотальности подпространства $F \subset \hat{E}^*$ мы имеем включение $z \doteqdot x - y \in L$. Отсюда следует, что $\|x - z\| = \|y\| \le 1 = \|\hat{x}\|$, т.е. $z \in P_L(x)$. Таким образом, подпространство L является проксиминальным.

Покажем, что из b) следует c). Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ последовательность Коши в слабой топологии $\sigma(M,N)$. Так как $F \subset \hat{E}^*$ образует минимальное, замкнутое и тотальное подпространство положительной характеристики, то F^* изоморфно $\hat{E}$. Поэтому N^* изоморфно M и в силу теоремы Банаха-Штейнгауза [9, стр. 283] пространство $N^* \approx M$ секвенциально слабо* полно. Следовательно, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в слабой* топологии $\sigma(M,N)$ пространства M. Так как множество B по условию является ограниченным и замкнутым в M, то оно является слабо* компактным и, следовательно, секвенциально слабо* полным в топологии $\sigma(M,N)$. Поскольку из замкнутости множества B в слабой* топологии $\sigma(M,N)$ следует замкнутость в топологии пространства M, то обратно из свойства c), а также из свойства d), очевидно, вытекает утверждение b).

Покажем, что из c) следует d). Поскольку $\hat{E}$ сепарабельно, то в силу слабой* компактности шара $\hat{S}_r^*$ следует, что сопряженное пространство $\hat{E}^*$ слабо* сепарабельно. Следовательно, $F \subset \hat{E}^*$ является замкнутой линейной оболочкой системы функционалов $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$. Таким образом, достаточно показать, что всякая последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ содержит подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. последовательность чисел $\alpha_i(\varphi_{n_k})$ сходится при всех $i = 1, 2, ..$.

Для этого применяем диагональный метод Кантера. Сначала выбираем из $\alpha_1(\varphi_n)$ сходящуюся подпоследовательность $\alpha_1(\varphi_n^1)$ при $i = 1$. Затем из $\alpha_2(\varphi_n^1)$ выбираем сходящуюся подпоследовательность $\alpha_2(\varphi_n^2)$ при $i = 2$, и так далее продолжаем по индукции. В результате получается бесконечная таблица функций $\{\varphi_n^i\}_{i,n=1}^{\infty}$, из которой выбираем диагональные элементы $\{\varphi_n^n\}_{n=1}^{\infty}$. При этом получается, что $\alpha_i(\varphi_n^n)$ сходится при всех $i = 1, 2, \ldots$ Так как по условию множество B секвенциально полно в слабой топологии $\sigma(M,N)$, то множество $B \subset M$ будет компактным в слабой топологии $\sigma(M,N)$.

Покажем, что из b) следует e). Из леммы 1 следует, что ненулевой функционал $\alpha \in N$ является опорным. Предположим, что существует последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$, т.ч. $\lim_{n\to\infty} \alpha(\varphi_n) = \|\alpha\|$, однако существует функционал $\beta \in N$, т.ч. выполняется неравенство $\overline{\lim_{n\to\infty}} \beta(\varphi_n) > \max_{\psi\in\Xi(\alpha)} |\beta(\psi)|$. Тогда, применяя свойство d), выберем подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $\lim_{n\to\infty} \gamma(\varphi_n) = \gamma(\varphi)$ при всех $\gamma \in N$ и $\overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta(\varphi_n)| = \lim_{n\to\infty} |\beta(\varphi_{n_k})|$. В силу определения множества B мы имеем $\varphi \in \bar{B}$. Докажем, что $\varphi \notin B$. В самом деле, для любого $\psi \in B \backslash \Xi(\alpha)$ выполняется строгое неравенство $|\alpha(\psi)| < \|\alpha\| = \lim_{n\to\infty} \alpha(\varphi_n) = \alpha(\varphi)$. Откуда следует $\varphi \notin B$. Кроме того, для любого $\psi \in \Xi(\alpha)$ будет выполняться строгое неравенство $|\beta(\psi)| \le \max_{\psi\in\Xi(\alpha)} |\beta(\psi)| < \overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta(\varphi_n)| = \lim_{k\to\infty} |\beta(\varphi_{n_k})| = |\beta(\varphi)|$, в силу которого мы также имеем $\varphi \notin B$. Таким образом, мы получили противоречие.

Покажем, что из e) следует b). Пусть $\varphi \in \bar{B} \backslash B$, тогда $\|\varphi\| = 1$ и существует последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$, т.ч. $\lim_{n\to\infty} \gamma(\varphi_n) = \gamma(\varphi)$ при всех $\gamma \in N$. По теореме Хана-Банаха [9, стр. 232] существует $\alpha \in M^*$, т.ч. $|\alpha(\varphi)| = \|\alpha\| = 1$. Тогда по лемме 1 можно считать, что $\alpha \in N$, и значит $\lim_{n\to\infty} \alpha(\varphi_n) = \alpha(\varphi) = 1$.

Так как $\Xi(\alpha)$ и $-\Xi(\alpha)$ являются выпуклыми, непересекающимися и слабо* замкнутыми подмножествами множества B, то выпуклая оболочка $\mathrm{co}(K) \subset B$ множества $K \doteqdot \Xi(\alpha) \cup (-\Xi(\alpha))$ является слабо* замкнутым подмножеством B. Поэтому для доказательства условия b) достаточно показать, что $\varphi \in \mathrm{co}(K)$. Предположим, что это включение не выполняется. В этом случае, по теореме отделимости существует такой функционал $\beta \in M^*$, что $|\beta(\varphi)| > \sup_{\psi\in\mathrm{co}(K)} |\beta(\psi)|$. Применяя конструкцию при доказательстве леммы 1, мы можем считать, что вместе с функционалом α подпространство N содержит β, т.е. $\alpha, \beta \in N$. Тогда имеем $\overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta(\varphi_n)| = \lim_{n\to\infty} |\beta(\varphi_n)| = |\beta(\varphi)| > \sup_{\psi\in\mathrm{co}(K)} |\beta(\psi)| \ge \sup_{\psi\in\Xi(\alpha)} |\beta(\psi)|$, что невозможно по условию. Получили противоречие.

Теорема 2. *Пусть аннулятор $L^\perp \subset C^*(T)$ чебышевского подпространства $L \subset C(T)$ бесконечной размерности в пространстве непрерывных функций на связном хаусдорфовом компакте T содержит минимальное, замкнутое и тотальное подпространство $F \subset L^\perp$. Тогда $F = L^\perp$ и размерность аннулятора $\dim L^\perp = 1$, при этом подпространство L образует гиперплоскость $L = \ker \alpha$, для которой $\alpha \in L^\perp$ является строго положительным функционалом.*

Доказательство. Так как $L \subset C(T)$ является чебышевским подпространством, то существует $\varphi \in C(T)$, т.ч. $\|\varphi - \upsilon\| \ge \|\varphi\| = 1$ при всех $\upsilon \in L$. В силу теоремы

Хана-Банаха [9, стр. 232] существует функционал $\alpha \in L^\perp$, т.ч. $\alpha(\varphi) = \|\alpha\| = 1$. При помощи леммы 1 мы можем считать, что $\alpha \in F$.

Поскольку факторпространство $\widehat{C(T)} = C(T)/L$ изоморфно сопряженному пространству $\widehat{C(T)} \approx F^*$ и аннулятор $L^\perp \cong \widehat{C(T)}^*$ изометрически изоморфен сопряженному пространству, то экстремальное множество $\Xi(\alpha)$ функционала α будет выпуклым и слабо* компактным множеством в пространстве $\widehat{C(T)}$. По теореме Крейна-Мильмана [8, стр. 477] существует крайняя точка $\hat{\tau} \in ex(\Xi(\alpha))$ в множестве $\Xi(\alpha)$. Тогда $\tau - P_L(\tau)$ является крайним подмножеством границы единичного шара $S \subset C(T)$ [2, стр. 903]. Так как подпространство L является чебышевским, то множество $\tau - P_L(\tau)$ состоит из одной точки, которая будет крайней точкой границы шара S. Поскольку в силу связности компакта T существуют только две крайние точки ± 1 шара S и $\hat{\varphi} \in \Xi(\alpha)$, то мы можем считать функцию $\varphi = 1$ крайней точкой границы шара S.

В силу теоремы Рисса-Маркова [8, стр. 288] функционал $\alpha \in C^*(T)$ задается интегралом по некоторой σ-аддитивной борелевской мере μ на компакте T, т.ч. вариация $|\mu| = \|\alpha\| = 1$. Поэтому имеем $\alpha(1) = \int d\mu = \mu(T) = |\mu| = \|\alpha\| = 1$. Следовательно, мера $\mu \ge 0$ неотрицательна и при этом, если $\alpha(\psi) = 0$, где функция $\psi \ge 0$ неотрицательна и не равна нулю, то $\mu(O) = 0$ для некоторого открытого множества $O \subset T$. Однако это противоречит равенству $\mu(T) = |\mu|$. Таким образом, функционал $\alpha > 0$ является строго положительным.

Докажем, что $\ker\alpha = L$. Предположим, что некоторый элемент $\phi \in \ker\alpha$ не принадлежит L. Так как подпространство $L \subset C(T)$ является проксиминальным, то, вычитая элемент наилучшего приближения подпространством L, мы можем считать, что $\|\phi - v\| \geq \|\phi\| = 1$ при всех $v \in L$. Тогда, применяя аналогичные рассуждения, как и выше, мы получим, что $\phi = \pm 1$. Поскольку функционал α является строго положительным $\alpha > 0$, то $\alpha(\phi) = \alpha(\pm 1) \neq 0$. Это противоречит условию $\phi \in \ker\alpha$. Таким образом, имеет место равенство $\ker\alpha = L$.

Литература:

1. I. Singer, On best approximation in normed linear spaces by elements of subspaces of finite codimension. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 1972, **17**, №8, 1245-1256.
2. G. Godini, Characterizations of proximinal subspaces in normed linear spaces. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* 1973, **18**, №6, 901-906.
3. V. Indumathi, Proximinal subspaces of finite codimension in general normed linear spaces. *Proc. London Math. Soc.* 1982, **45**, №3, 435-455.
4. А. Л. Гаркави, О наилучшем приближении элементами бесконечномерных подпространств одного класса. *Мат. сбор.*, 1963. **62**, №1 (104), 104-120.
5. А. Л. Гаркави, Аппроксимативные свойства подпространств конечного дефекта в пространстве непрерывных функций. *ДАН СССР* 1964, **155**, 513-516.
6. А. Л. Гаркави, Задача Хелли и наилучшее приближение в пространстве непрерывных функций. *Изв. АН СССР, сер. мат.* 1967, **31**, №3, 641-656.
7. Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
8. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
9. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.