ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

УДК 539.19

Траектории жидких частиц в электропроводной жидкости в нелинейном приближении

Егерева Эльвира Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Калдоркина Анастасия Сергеевна, студентка 2 курса
факультета Биотехнологии и биологии
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарёва

Аннотация. *Рассматриваются траектории жидких частиц в электропроводной жидкости в двух случаях: 1) конечной толщины слоя жидкости; 2) бесконечной толщины слоя жидкости.*

Показано, что в линейном приближении траекториями частиц являются эллипсы, которые переходят в окружности для частного случая: бесконечно глубокой жидкости. В нелинейном приближении траектории жидких частиц в электропроводной жидкости разомкнуты. Исследован период колебания жидкой частицы, который превышает период колебания волны. Показано, что переносная скорость Стокса, связанная с разомкнутостью траекторий частиц, увеличивается с ростом поверхностного натяжения и уменьшается с возрастанием электрического поля, а также с ростом глубины жидкости.

Ключевые слова: *траектории жидких частиц, электропроводная жидкость, период колебаний волны, эллипс, окружность, поверхностное натяжение, нелинейное приближение.*

Annotation. *Trajectories of liquid particles in an electrically conductive liquid are considered in two cases: 1) the finite thickness of the liquid layer; 2) the infinite thickness of the liquid layer.*

It is shown that, in the linear approximation, the trajectories of the particles are ellipses that transform into circles for a particular case: an infinitely deep fluid. In the nonlinear approximation, the trajectories of liquid particles in an electrically conductive liquid are open. The period of oscillation of a liquid particle that exceeds the period of wave oscillation is studied. It is shown that the transported Stokes velocity associated with the openness of the trajectories of particles increases with increasing surface tension and decreases with increasing electric field, as well as with increasing depth of the liquid.

Keywords: *trajectories of liquid particles, conductive liquid, period of wave oscillations, ellipse, circle, surface tension, nonlinear approximation.*

Исследование поверхностных волн в жидкостях, взаимодействующих с электрическим полем, имеет практический и теоретический интерес. Движение частиц вязкой несжимаемой жидкости, вызванное распространением по свободной поверхности волны малой амплитуды рассмотрено в работе [3]. В данной работе автор получил уравнения движения жидких частиц при наличии бегущей или стоячей волны на поверхности бесконечно глубокого слоя. При распространении бегущей волны траектории имеют вид спирали, центр которой соответствует состоянию покоя. В случае стоячей волны движение каждой частицы происходит по отрезкам, длина которых с течением времени уменьшается. Направление движения изменяется от вертикального в пучностях до горизонтального в узлах [3].

Рассматривается распространение волн на заряженной поверхности бесконечно глубокого слоя жидкого проводника, находящегося в однородном поле тяжести. Жидкость граничит со средой пренебрежимо малой плотности – атмосферой, газом или вакуумом. Жидкость предполагается несжимаемой и однородной.

Определим траектории частиц жидкости при распространении волны в данной краевой задаче. Обозначим координаты частицы жидкости $x^*(t^*)$, $z^*(t^*)$, тогда проекции скорости этой частицы имеют вид:

$$v_x{}^* = \frac{dx^*}{dt^*},\ v_z{}^* = \frac{dz^*}{dt^*}. \quad (1)$$

Ещё Рэлеем было установлено, что в нелинейных волнах частота колебания частицы жидкости ω_p отличается от частоты волны ω_w. Соответствующие периоды колебаний связаны с частотами: $\omega_p = 2\pi/\tau_p$, $\omega_w = 2\pi/\tau_w$. Для волны справедливо равенство $\omega_w = ck$, где c – фазовая скорость, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число волны, λ – длина волны.

Вводя безразмерное время $t = \omega_p t^*$, с учётом уравнений (1) в безразмерном запишем [2]

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{kc}{\omega_p}(1 - \delta v_x), \frac{dz}{dt} = \frac{kc\delta}{\omega_p} v_z, x = k(x^* - ct^*), z = kz^*. \quad (2)$$

Решение исходных дифференциальных уравнений будем искать в виде рядов по малому параметру [1]:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i X_i;\ z = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i Z_i;\ \frac{kc}{\omega_p} = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \gamma_i. \quad (3)$$

Подставляя ряды (3) в уравнения (2) и учитывая разложения функций

$$exp(Z_0 + \delta Z_1 + \cdots) = e^{Z_0}(1 + \delta Z_1 + \ldots),$$
$$cos(X_0 + \delta X_1 + \cdots) = cosX_0 - sinX_0(\delta X_1 + \ldots) + \ldots,$$
$$sin(X_0 + \delta X_1 + \cdots) = sinX_0 - cosX_0(\delta X_1 + \ldots) + \ldots,$$

будем иметь :

$$\frac{dX_0}{dt} = -1, \frac{dZ_0}{dt} = 0, \frac{dX_1}{dt} = -\gamma_1 + e^{Z_0}cosX_0;\ \frac{dZ_1}{dt} = e^{Z_0}sinX_0,$$

$$\frac{dX_2}{dt} = -\gamma_2 + \gamma_1 e^{Z_0}cosX_0 + Z_1 cosX_0 - X_1 e^{Z_0}sinX_0 + 2Q_2{}^{(1)}e^{2Z_0}cos2X_0,$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$\frac{dZ_2}{dt} = \gamma_1 e^{Z_0} sinX_0 + X_1 e^{Z_0} cosX_0 + Z_1 e^{Z_0} sinX_0 + 2Q_2{}^{(1)} e^{2Z_0} sin2X_0, (5)$$

$\frac{dX_3}{dt} = -\gamma_3 + \gamma_2 e^{Z_0} cosX_0 + \gamma_1 [Z_1 e^{Z_0} cosX_0 - X_1 e^{Z_0} sinX_0 + 2Q_2{}^{(1)} e^{2Z_0} * sin2X_0] + Z_2 e^{Z_0} cosX_0 - X_2 e^{Z_0} sinX_0 - X_1 Z_1 e^{Z_0} sinX_0 + \frac{1}{2} e^{Z_0}(Z_1{}^2 - X_1{}^2) * cosX_0 - 8Q_2{}^{(1)} X_1 e^{2Z_0} sin2X_0 + 8Q_2{}^{(1)} Z_1 e^{2Z_0} sin2X_0 + Q_1{}^{(2)} e^{Z_0} cosX_0 + 3Q_3{}^{(2)} e^{3Z_0} cos3X_0,$

$\frac{dZ_3}{dt} = \gamma_2 e^{Z_0} sinX_0 + \gamma_1 [X_1 e^{Z_0} cosX_0 + Z_1 e^{Z_0} sinX_0 + 2Q_2{}^{(1)} e^{2Z_0} sin2X_0] + Z_2 e^{Z_0} sinX_0 + X_2 e^{Z_0} cosX_0 - X_1 Z_1 e^{Z_0} cosX_0 + \frac{1}{2} e^{Z_0}(Z_1{}^2 - X_1{}^2) sinX_0 + Q_1{}^{(2)} e^{Z_0} sinX_0 + 3Q_3{}^{(2)} e^{3Z_0} sin3X_0 + 8Q_2{}^{(1)} X_1 e^{2Z_0} cos2X_0 + 8Q_2{}^{(1)} Z_1 e^{2Z_0} sin2X_0.$

Интегрируя два первых уравнения в (5), находим
$X_0 = -t + C_1, Z_0 = C_2.$

Выбирая в качестве C_1, C_2 значения безразмерных координат частицы в покоящейся жидкости, т. е. при отсутствии волны $C_1 = a, C_2 = b$, получим

$$X_0 = a - t, Z_0 = b. (6)$$

С учётом (6) вторые два уравнение системы (5) примут вид

$$\frac{dX_1}{dt} = -\gamma_1 + e^b \cos(a-t), (7)$$

$\frac{dZ_1}{dt} = e^b \sin(a-t).$

Интегрируя (7) с учётом периодичности X_1, Z_1 находим

$$X_1 = -e^b \sin(a-t), \ Z_1 = e^b \cos(a-t). (8)$$

Очевидно, что для периодичности X_1 следует принять $\gamma_1 = 0$. Произвольные постоянные, появляющиеся при интегрировании в правых частях (8), следует также принять равными нулю, поскольку их наличие привело бы к нарушению периодичности функций X_2, Z_2, поскольку X_1, Z_1 входят в правые части уравнений системы (5), подставляя (8) в уравнения (5), находим

$$\frac{dX_2}{dt} = -\gamma_2 + e^b + 2Q_2{}^{(1)} e^{2b} \cos2(a-t), (9)$$

$\frac{dZ_2}{dt} = 2Q_2{}^{(1)} e^{2b} \sin2(a-t).$

Интегрируя (9) с учётом периодичности X_2, Z_2, находим

$$X_2 = -2Q_2{}^{(1)} e^{2b} \sin2(a-t). (10)$$

$Z_2 = 2Q_2{}^{(1)} e^{2b} \cos2(a-t), \gamma_2 = e^{2b}.$

Аналогично предыдущему, подставляя (6), (8), (10) в шестое уравнение системы (5), получим

$\frac{dX_3}{dt} = -\gamma_3 + \frac{2}{3} e^{3b} cos(a-t) + 8Q_2{}^{(1)} e^{3b} \cos(a-t) + Q_2{}^{(1)} e^{3b} cos3(a--t) + Q_1{}^{(2)} e^b cos(a-t) + 3Q_3{}^{(2)} e^{3b} cos3(a-t),$ (11) $\frac{dZ_3}{dt} = \frac{1}{2} e^{3b} sin(a-t) + 8Q_2{}^{(1)} e^{3b} \sin(a-t) + Q_2{}^{(1)} e^{3b} sin3(a-t) + +Q_1{}^{(2)} e^b sin(a-t) + 3Q_3{}^{(2)} e^{3b} sin3(a-t),$

Интегрируя (11) с учётом периодичности, находим
$X_3 = -\frac{3}{2} e^{3b} sin(a-t) - 8Q_2{}^{(1)} e^{3b} \sin(a-t) - \frac{1}{3} Q_2{}^{(1)} e^{3b} sin3(a-t) -$
$-Q_1{}^{(2)} e^b sin(a-t) - Q_3{}^{(2)} e^{3b} sin3(a-t),$

$$Z_3 = \frac{1}{2} e^{3b} cos(a-t) - 8Q_2{}^{(1)} e^{3b} \cos(a-t) + Q_1{}^{(2)} e^b cos3(a-t) + \frac{1}{3} Q_2{}^{(1)} e^{3b} cos3(a-t) + Q_3{}^{(2)} e^{3b} cos3(a-t), \gamma_3 = 0. (12)$$

Собирая вместе все приближения (6), (8), (10), (12) можно записать кинематический закон движения частицы жидкости с равновесными или лагранжевыми координатами a, b:

$$x(a,b,t) = X_0 + \delta X_1 + \delta^2 X_2 + \delta^3 X_3, (13)$$

$z(a,b,t) = Z_0 + \delta Z_1 + \delta^2 Z_2 + \delta^3 Z_3.$

Из выражений $x = k(x^* - ct^*), t = \omega_p t^*$ следует

$$\frac{dx^*}{dt^*} = \frac{d}{dt^*}\left(\frac{x}{k} + ct^*\right) = \frac{\omega_p}{k}\frac{dx}{dt} + c. \quad (14)$$

С учетом (13) запишем

$\frac{dx}{dt} = \frac{dX_0}{dt} + \delta \frac{dX_1}{dt} + \delta^2 \frac{dX_2}{dt} + \delta^3 \frac{dX_3}{dt}.$

Подставляя (15) в (14) и учитывая третье равенство (3), находим

$$v_x{}^* = \frac{dx^*}{dt^*} = c\left(1 + \frac{\omega_p}{ck}\frac{dx}{dt}\right) = c[1 + (1 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i \gamma_i)^{-1}(-1 + +\delta f(t))] = c[1 + (1 - \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i \gamma_i + \cdots)(-1 + \delta f(t))] = c[\sum_{i=1}^{\infty} \delta^i \gamma_i + \delta F(t)] \approx \delta^2 c_0 \gamma_2 + \delta c F(t), (15)$$

где $f(t), F(t)$ - ряды, составленные из периодических функций от времени.

Выражение (15) показывает, что горизонтальная компонента скорости жидкости $v_x{}^*$ кроме периодических слагаемых $\delta c F(t)$ имеет еще постоянную, не зависящую от времени составляющую $V_S{}^* = \delta^2 c_0 \gamma_2 = e^{2b}$ (17), называемую переносной скоростью Стокса. Наличие этой скорости приводит к разомкнутости траекторий частиц жидкости. Частицы жидкости в волне, кроме колебательного движения, обладают еще и постоянным движением в направлении распространения волны.

Скорость этого движения $V_S{}^*$ быстро затухает с глубиной по экспоненциальному закону (16), в котором $b \leq 0$.

С учетом (2) можно записать

$$v_z{}^* = \frac{dz^*}{dt^*} = \frac{\omega_p}{k}\frac{dz}{dt} = c(1 - \sum_{i=1}^{\infty}\delta^i\gamma_i + \cdots)\delta G(t),$$

где G(t) – ряд, составленный из периодических функций от времени. Следовательно, вертикальная составляющая скорости $v_z{}^*$ содержит только периодические слагаемые.

Литература:

1. Алешков Ю. З. Название источника: Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во: Ленинградского университета, 1981. – 196с.

2. Баринов В. А., Тактаров Н. Г. Название источника: Математическое моделирование магнитогидродинамических поверхностных волн. Саранск: Изд-во Мордовского университета, 1991. – 96 с.

3. Басинский К. Ю., Название источника: Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Изд-во: Удмуртский государственный университет. – Ижевск, 198 с.