www.esa-conference.ru

Определение реакций связей в плоской системе сходящихся сил этапами эквивалентных преобразований активных факторов

Чибакова Екатерина Анатольевна, студентка 1 курса
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, г. Нижний Новгород

Аннотация. *В статье рассматривается способ решения учебных задач статики по определению реакций связей в плоской системе сходящихся сил. Он основан на последовательных преобразованиях активных сил, составляющих три этапа: первый – нахождение равнодействующей активных сил; второй –определение уравновешивающей силы для установленной равнодействующей; третий – разложение уравновешивающей на составляющие по направлениям линий действия реакций. Предлагаемый метод решения анализируемого типа задач является графоаналитическим. В сравнении с классическим методом его отличает возможность выполнения геометрических построений без результатов аналитических расчетов.*

Ключевые слова: *методика обучения теоретической механике, основы статики, сила, плоская система сходящихся сил, активные и реактивные силы, условия равновесия, равнодействующая и уравновешивающая сила, разложение силы на составляющие, дополнительная совместная творческая деятельность.*

Применение условий равновесия к плоским системам сходящихся сил (далее ПСCC) позволяет применить графоаналитический метод к классу учебных задач статики. В теоретической механике, как общепрофессиональной дисциплине специальностей технического профиля в учреждениях профессионального образования, равновесие ПСCC изучается в начале раздела «Статика». На теоретических и практических занятиях анализируются векторы активных и реактивных сходящихся сил, рассматриваются способы эквивалентных преобразований и общий алгоритм установления зависимостей между внешними и внутренними факторами, выполнения расчетов и геометрических построений.

Анализ научно-методических и периодических изданий за последнее время позволяет выделить актуальные вопросы теории и практики, связанные с решением задач статики в ПСCC и методикой обучения способам решения таких задач. К ним относятся: разработка дидактических средств, в том числе электронных ресурсов и приложений, методических материалов, современных педагогических технологий [1-6 и др.]; раскрытие принципов и способов решения задач статики [7-11 и др.]; организация и стимулирование познавательной активности, самостоятельной и коллективной творческой деятельности [12-16 и др.], формирование умений доказательно рассуждать и аргументировать [17-19 и др.] и т.д.

В целом, следует констатировать, что в техническом знании сформировался общий подход, который описан в учебной литературе и может считаться классическим применительно к анализируемым задачам [20; 21 и др.]. Вместе с тем, существуют оригинальные и альтернативные способы решения задач статики, отличающиеся от общей схемы рассуждений и последовательности осуществляемых операций [22-25 и др.]. Изучение их способствует более глубокому осмыслению причинно-следственных связей и закономерностей в статических системах, а также стимулирует процесс творческого поиска.

В ходе нашей самостоятельной познавательной деятельности удалось обратить внимание на возможность определения реакций в идеальных связях по параметрам приложенных сил в ПСCC на основе уравновешивания результирующей нагрузки с последующим разложением уравновешивающей силы по линиям действия реакций. Как и в случае применения классического способа, предлагаемый метод позволяет аналитически и графически находить реактивные силы, то есть производить независимую проверку. В этой связи обоснование нашего подхода к решению задач статики в ПСCC и сравнение его с классическим методом представляет цель публикуемой работы.

Рассмотрим конкретный пример и решим задачу в общем виде разными способами.

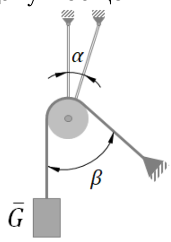

Рис. 1. Исходные условия задачи.

Пусть через блок, закрепленный на стержнях с шарнирными связями, проходит трос, нагруженный силой тяжести груза (см. рис. 1). Угол между стержнями составляет α, а угол между ветвями троса – β. Требуется определить реакции в стержнях, пренебрегая массой конструкции, за исключением груза, трением и размерами блока.

Допущение пренебрежения диаметром шкива позволяет считать, что векторы активных и реактивных сил будет сходиться в точке A, совпадающей с проекцией оси блока на плоскость системы. Введем прямоугольную систему координат xoy, совместив начало отсчета с точкой A и направив оси по горизонтали и вертикали. Реализуем принцип освобождаемости (см. рис. 2).

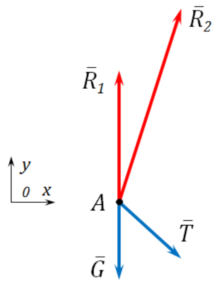

Рис. 2. Преобразование данных: введение системы координат, реализация принципа освобождаемости, получение ПССС.

Классическое решение предусматривает применение условий равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma X = 0 \\ \Sigma Y = 0 \end{cases},$$

которые в нашем случае представляют систему уравнений:

$$\begin{cases} \Sigma X = R_2 \cdot \sin\alpha + T \cdot \sin\beta = 0 \\ \Sigma Y = R_1 + R_2 \cdot \cos\alpha - G - T \cdot \cos\beta = 0 \end{cases}.$$

Поскольку трение в блоке не учитываем, то $G = T$. Поэтому

$$R_1 = G + G \cdot \cos\beta + G \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha =$$

$$= G \cdot (1 + \cos\beta + \sin\beta \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha), \qquad (1)$$

$$R_2 = -G \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Отрицательный знак реакции R_2 указывает на то, что в действительности она имеет противоположное выбранной стороне направление.

В некоторых источниках для выполнения проверки предлагается произвести поворот системы координат до совмещения оси абсцисс или ординат с другой линией действия какой-либо из сил и вновь применить условия равновесия. Равенство ответов будет аналитическим подтверждением правильности решения задачи.

Геометрическая проверка заключается в построении силового многоугольника с соблюдением линейных размеров в масштабе, отложением заданных углов и сохранением направлений векторов. Замкнутость многоугольника (совпадение конца последнего вектора с началом первого) является признаком верного определения реакций.

Предлагаемый нами способ на первом этапе решения задачи предусматривает нахождение равнодействующей $\bar{F}_\Sigma$ активных сил $\bar{G}$ и $\bar{T}$, которая будет диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах, как сторонах (см. рис. 3а). Воспользуемся теоремой косинусов:

$$F_\Sigma = \sqrt{G^2 + T^2 + 2 \cdot G \cdot T \cdot \cos\beta} = \sqrt{G^2 + G^2 + 2 \cdot G \cdot G \cdot \cos\beta} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot G^2 \cdot (1 + \cos\beta)} = \sqrt{4 \cdot G^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} = 2 \cdot G \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right). \qquad (3)$$

При этом, так как $G = T$, то рассматриваемый параллелограмм – ромб. Значит, угол $\widehat{\bar{G}\,\bar{F}_\Sigma} = \frac{\beta}{2}$.

На втором этапе решения уравновешиваем равнодействующую F_Σ силой F. Согласно аксиоме равновесия двух сил, F равна F_Σ по модулю, находится с ней на одной линии действия и направленна противоположно. То есть

$\bar{F}_\Sigma = -\bar{F}$.

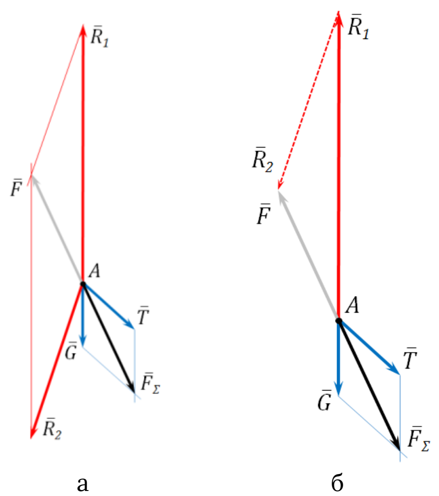

Рис. 3. Преобразования ПССС: а) определение равнодействующей $\bar{F}_\Sigma$ и уравновешивающей $\bar{F}$ сил, реакций $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$; б) построение силового треугольника на векторах $\bar{F}$, $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$.

Третий этап требует разложения силы F на составляющие по линиям действия реакций (по осям стержней). Геометрически вектор $\bar{F}$ представляет сумму векторов $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$. Иными словами, $\bar{F}$ – диагональ параллелограмма со сторонами $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$. В соответствии с принципами сложения векторов по правилу параллелограмма можно однозначно установить направление реакций $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$. Только в одном из четырех возможных вариантов сила $\bar{F}$ принадлежит внутреннему углу $\widehat{\bar{R}_1\,\bar{R}_2}$. А это, в свою очередь, свидетельствует о деформациях стержней. В нашем случае первый стержень растянут, а второй – сжат.

Дополнительные построения позволяют выделить треугольник, образованный векторами $\bar{F}$, $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ (см. рис. 3б), с углами:

$\widehat{\bar{R}_1\,\bar{R}_2} = \alpha$; $\widehat{\bar{R}_1\,\bar{F}} = \widehat{\bar{G}\,\bar{F}_\Sigma} = \frac{\beta}{2}$; $\widehat{\bar{F}\,\bar{R}_2} = \pi - \alpha - \frac{\beta}{2}$.

Применим теорему синусов и получим двойное равенство:

$\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{R_1}{\sin(\pi-\alpha-\frac{\beta}{2})} = \frac{R_2}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$.

Откуда, для первой реакции, учитывая формулу приведения,

$sin(\pi - \alpha - \frac{\beta}{2}) = sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$,

приходим к промежуточному результату:

$R_1 = F \cdot \frac{sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}{sin\,\alpha}$.

Преобразуем числитель дроби по формуле сложения тригонометрической функции,

$sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = sin\,\alpha \cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + cos\,\alpha \cdot sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$.

Тогда

$$R_1 = F \cdot \left[cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot ctg\,\alpha\right]. \quad (4)$$

Для второй реакции справедлива зависимость:

$$R_2 = F \cdot \frac{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{sin\,\alpha}. \quad (5)$$

Из уравнения (3) в формулу (4) подставим вместо F значение F_Σ, ибо $|F| = |F_\Sigma|$:

$R_1 = 2 \cdot G \cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left[cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot ctg\,\alpha\right] =.$

$= G \cdot \left[2 \cdot cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 2 \cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot ctg\,\alpha\right]$.

В соответствии с формулой понижения степени половинного угла (аргумента):

$2 \cdot cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1 + cos\,\beta$,

а по формуле двойного угла (аргумента):

$2 \cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = sin\,\beta$.

Тогда уравнение для R_1 запишется иначе:

$$R_1 = G \cdot (1 + cos\,\beta + sin\,\beta \cdot ctg\,\alpha)\,. \quad (6)$$

Аналогичные преобразования произведем с формулой (5):

$$R_2 = 2 \cdot G \cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{sin\,\alpha} = G \cdot \frac{sin\,\beta}{sin\,\alpha}. \quad (7)$$

Таким образом, решение задачи разными способами – классическим методом, общеизвестным по учебно-методической и справочной литературе, и предлагаемым нами методом – приводит к одним и тем же результатам. Полученные выражения (1) и (7), (2) и (8) для определения реакций R_1 и R_2 на основе исходных данных – силы тяжести G и углов α и β – попарно одинаковы. Поскольку рассуждения производились в самом общем виде, то можно сделать заключение о достоверности и альтернативности данных подходов при определении реакций в ПССС. Следовательно, по отношению друг к другу данные методы могут применяться для выполнения проверочных расчетов или геометрических построений.

Признаем, что аналитически предлагаемый способ сложнее обычного классического способа из-за большего числа преобразований с тригонометрическими формулами. Но геометрически он более очевиден, позволяет на основе умозаключений утверждать об истинном направлении реактивных сил и находить необходимые значения реакций путем только построений в те же самые три этапа – 1) определение равнодействующей активных сил, 2) уравновешивание равнодействующей и 3) разложение уравновешивающей на составляющие по линиям действия реакций. При этом не требуются предварительные или промежуточные вычисления. Кроме того, следует отметить и то обстоятельство, что аналитическая сложность в значительной степени зависит от условий учебной задачи.

Литература:

1. Митюшов Е.А., Мисюра Н.Е., Берестова С.А. Инновационные технологии массового обучения на примере онлайн курса «Инженерная механик» // Инженерное образование. 2017. № 21. С. 83-89.
2. Носков М.В., Носкова О.Е. Методика применения прикладных программ при изучении дисциплины «Теоретическая механика» // Сборник мат-лов Междунар. науч.-практ. конф. «Информатизация образования: теория и практика», 20-21 ноября 2015 г. – Омск: Изд-во ООО «Полиграфический центр КАН». 2015. С. 112-117.
3. Носкова О.Е. Использование прикладных онлайн-программ при изучении теоретической механики // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 5. С. 476.

4. Обносов К.Б., Бондаренко Н.И., Паншина А.В. О методике компьютерного тестирования студентов по разделу «Статика» // Автомобиль. Дорога. Инфраструктура. 2018. № 2 (16). С. 17.
5. Чибаков А.С. О проблематизации в профессиональном обучении квалифицированных рабочих, служащих и специалистов как факторе формирования опыта аргументированного принятия решений // Интернет-журнал «Мир науки» 2016, Том 4, номер 4 http://mir-nauki.com/PDF/44PDMN416.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.
6. Чибаков А.С. Проблемно-модульная технология в профессиональном обучении высокотехнологичным профессиям и специальностям // Интернет-журнал «Мир науки» 2016, Том 4, номер 2 http://mir-nauki.com/PDF/10PDMN216.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.
7. Королев Ю.В. Теоретическая механика. Учимся решать задачи. Учеб. пособ. для самостоятельной работы в 2-х частях. Часть 1. Статика. – Иркутск: Изд-во Иркутского национального исследовательского технического ун-та. 2015. 108 с.
8. Крутова И.А., Исмухамбетова А.С. Методы решения основных задач теоретической механики. Учеб.-метод. пособ. – Астрахань: Изд-во ИД «Астраханский университет». 2015. 147 с.
9. Максимова О.Г. и др. Основы теоретической механики в примерах и задачах. Учеб. пособ. / О.Г. Максимова, А.В. Максимов, Я.А. Соловьева. – Вологда: Изд-во Вологодского гос. ун-та. 2014. 95 с.
10. Попов А.М. и др. Задания по теоретической механике (статика). Методич. указ. / А.М. Попов, В.Б. Зиновьев, Л.А. Спиридонова, Г.П. Курочкин. – Новосибирск: Изд-во Сибирского гос. ун-та путей сообщения. 2018. – 83 с.
11. Статика. Примеры решения задач по теоретической механике для самостоятельной работы студентов: учебно-методическое пособие / Сост. Н.В. Кузнецова, В.Е. Головко, Ю.Н. Лазарев, С.Г. Петров, М.В. Саблина; ГОУВПО СПбТГУРП. СПб., 2009 27 с.
10. Самсонов Г.П., Клоков А.С., Сорокин А.Н. Практика применения базы знаний Wolframalpha во внеаудиторной самостоятельной работе обучающихся при изучении раздела «Статика» курса теоретической механики // Электронный научно-методический журнал Омского ГАУ. 2017. № 1 (8). С. 43.
11. Хохлова О.А., Хохлов А.В., Пономарева Е.В. Применение комплекса электронных проблемно ориентированных обучающих систем по теоретической механике // Вестник Астраханского государственного технического университета. 2017. № 1 (63). С. 69-76.
12. Чибаков А.С. Исследование развития познавательной активности учащихся в условиях среднего профессионального образования / А.С. Чибаков // Научный диалог. – 2016. – № 4 (52). – С. 395 – 408.
13. Чибаков А.С. Формирование опыта коллективной самоорганизации профессиональной деятельности в практической подготовке квалифицированных рабочих // Научное мнение. – 2016. – № 12. – С. 130 – 133. – URL: http://unipress.pro/catalog.php?pid=109&aid=2814 (дата обращения: 25.05.2020).
14. Чибаков А.С., Крылов Д.А. Дополнительное совместное творческое проектирование обучающихся и педагогов как фактор повышения качества профессионального обучения в техникуме // Вестник Марийского государственного университета. 2017. № 4 (28). С. 43 – 51.
15. Чибаков А.С. Стимулирование познавательной активности учащихся вопросно-ответными процедурами в профессиональном обучении // Сборник трудов по материалам XII международной научно-практической конференции «Научные перспективы XXI века. Достижения и перспективы нового столетия». Новосибирск, 19-20 июня 2015 г. – Новосибирск: Изд-во Международного научного института «Educatio», 2015. С. 138-140.
16. Шляхова А.Г., Хатыпов А.И., Шляхов А.Т. Теоретическая механика. Методические указания по организации самостоятельной и выполнению расчетно-графической работ по дисциплинам: «Теоретическая механика». – Альметьевск: Изд-во Альметьевского гос. нефтяного ин-та. 2013. 85 с.
17. Крылов Д.А., Чибаков А.С. Измерение и оценка развития аргументативных умений и качеств будущих квалифицированных рабочих и специалистов в процессе профессиональной подготовки // Современные проблемы науки и образования. – 2016. – № 1.; URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=24099
18. Крылов Д.А., Чибаков А.С. Развитие аргументативных качеств обучающихся методами СПР при освоении профессиональных модулей // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 6; URL: www.science-education.ru/130-23911
19. Плахотников А.Г. Основы эффективно развивающего обучения студентов архитектурному рисунку // Архитектурные исследования. 2017. № 1 (9). С. 54-62.
20. Кокушкин В.В. и др. Пространственная статика. Учебное пособие / В.В. Кокушкин, С.Н. Саяпин, П.М. Шкапов. – М.: Изд-во Московского гос. технического ун-та им. Н.Э. Баумана. 2015. – 48 с.
21. Теоретическая механика: теория, задания и примеры решения задач. Издание второе исправленное и дополненное. Учебное пособие для техн. вузов/ Ермаков Б.Е., Асриянц А.А., Борисевич В.Б., Кольцов В.И.; Под ред. Б.Е. Ермакова. М.: 2007 – 344 с.
22. Девин В.В., Ткачук В.С. Векторная форма решения задач пространственной статики в системе Mathcad // Актуальные научные исследования в современном мире. 2018. № 10-1 (42). С. 60-70.
23. Скрыльников Н.Е. Применение математических методов для исследования равновесия тел на примере задач из теоретической механики // Сборник науч. статей Междунар. науч.-практ. конф. «Математика и ее приложения в современной науке и практике». Отв. ред. Е.А. Бойцова. Курск, 15-17 апреля 2015 г. – Курск: Изд-во ЗАО «Университетская книга». 2015. С. 150-156.

24. Чибаков А.С. Совершенствование методики обучения решению задач статики в курсе технической механики в организации среднего профессионального образования // Современные наукоемкие технологии. 2017. № 12. С. 107-112.

25. Ягафарова Х.Н., Ямалтдинов А.И. Применение математических методов при формировании общеинженерных компетенций у студентов технических вузов // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. 2015. № 2. С. 477-490.