www.esa-conference.ru

Видоизмененная задача Коши для пространственного аналога уравнения Эйлера-Дарбу с параметрами равными одной второй

Родионова Ирина Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Бушков Станислав Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.Королёва

Аннотация. *В силу некорректности задачи Коши в классической постановке для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона в случае его параметров, равных одной второй, авторами предлагается видоизмененная задача Коши для одного из пространственных аналогов указанного уравнения с параметрами, равными одной второй. Суть постановки в том, что на плоскости сингулярности коэффициентов уравнения, кроме самого решения и производной второго порядка, задается комбинация первой и второй производных искомого решения. Единственность решения поставленной задачи доказана методом Римана, существование – непосредственной проверкой. Решение задачи получено в явном виде.*

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения гиперболического типа, краевая задача, интегральное уравнение, задача Коши.*

Уравнение

$$L(u) = u_{xyz} - \frac{1}{2(x-y-z)}u_{xz} + \frac{1}{2(x-y-z)}u_{yz} = 0 \tag{1}$$

рассмотрим в области

$$G = \left\{(x,y,z)\,\middle|\, \begin{matrix} 0 < z < x-y \\ x > y \end{matrix}\right\}.$$

Известно, что для уравнения Эйлера-Дарбу

$$u_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta-\xi}u_\xi - \frac{\alpha}{\eta-\xi}u_\eta = 0 \qquad \text{в случае} \qquad |\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}$$

классическая постановка задач Коши и Коши-Гурса с данными на линии $\eta = \xi$ является некорректной в силу того, что либо самое решение, либо его нормальная производная на $\eta = \xi$ обращаются в бесконечность [1]. В силу этого авторами для уравнения (1) предлагается:

<u>Видоизмененная задача Коши</u> (задача C^*)

В области G найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y,x-y) = \tau(x,y), (x,y) \in \overline{\mathcal{D}}, \mathcal{D} = \{(x,y) | x > y\}; \tag{2}$$

$$\lim_{z \to x-y-0} (x-y-z)\left(u_{xz} - u_{yz}\right) = \mu(x,y), (x,y) \in \mathcal{D}; \tag{3}$$

$$\lim_{z\to x-y-0}\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \left(u_{xz}-u_{yz}\right)(x-y-z)\left[\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) - ln\sqrt{x-y-z}\right]\right\} = \tag{4}$$
$$= \nu(x,y);\ (x,y) \in \mathcal{D},$$

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$ – логарифмическая производная гамма-функции.

Условия, налагаемые на заданные функции τ, μ, ν определим позднее. Для решения поставленной задачи применим метод Римана.

Функция Римана имеет вид [1]:

$$V(M,M_0) = \frac{x-y-z}{(x_0-y-z)^{\frac{1}{2}}(x-y_0-z)^{\frac{1}{2}}} F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\delta\right), \qquad \text{где} \tag{5}$$

$$\delta = \frac{(x_0-x)(y-y_0)}{(x_0-y-z)(x-y_0-z)}, F(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(\gamma)_n n!}\delta^n -$$

$-$гипергеометрическая функция Гаусса.

В области G возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и, поскольку коэффициенты уравнения (1) обращаются в бесконечность на плоскости $z = x - y$, рассмотрим область H_ε, ограниченную плоскостями $x = x_0, y = y_0$, $z = z_0, z = x - y - \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$. В предположении, что $u(x,y,z)$ – решение задачи C^* существует, проинтегрируем тождество Грина, полученное в работе [3]

$$V \cdot L(u) - uL^*(V) = \frac{1}{3}\left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right]$$ по области H_ε.

Для уравнения (1) имеем

$$P = Vu_{yz} + uV_{yz} - V_y u_z + 3u_z aV, a = -\frac{\frac{1}{2}}{x-y-z},$$

$$Q = V(u_{xz} + 3ub_z) + uV_{xz} - V_z u_x - 3buV_z, b = \frac{\frac{1}{2}}{x-y-z},$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$H = V(u_{xy} - 3a_x u + 3bu_y) - V_x u_y - 3auV_x + V_{xy}u,$

V – функция Римана (5), u – решение уравнения (1).

Применяя к интегральному тождеству формулу Гаусса-Остроградского, получим:

$$\sum_{i=0}^{3} \iint_{\mathcal{D}_i} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + H\cos\gamma)ds = \sum_{k=1}^{4} I_k = 0\,, \tag{6}$$

$\mathcal{D}_i$ – грани пирамиды H_ε, лежащие соответственно в плоскостях $x = x_0, y = y_0, z = z_0, z = x - y - \varepsilon.$

Применяя интегрирование по частям, свойства функции Римана [1], после ряда преобразований, традиционных для данного метода, приходим к тождеству [3]

$$u(x_0,y_0,z_0) = u(x_0,y_0,x_0-y_0-\varepsilon) - \frac{1}{2}\int_{z_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} [u_z(x_0\,,x_0-z-\varepsilon,z)V +$$

$$+u_z(z+y_0+\varepsilon,y_0,z)V]dz\; - \frac{1}{2}\int_{y_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} dy \int_{z_0+y+\varepsilon}^{x_0} (u_{xz}-u_{yz})V\big|_{z=x-y-\varepsilon}\, dx -$$

$$-\int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} dy \int_{z_0+y+\varepsilon}^{x_0} \left[\frac{V}{x-y-z} + \frac{1}{2}(V_y - V_x)\right] u_z\,\big|_{\,z=x-y-\varepsilon} dx. \tag{7}$$

Из вида функции Римана (5) следует, что при $\varepsilon \to 0$ одномерный интеграл формулы (7) стремится к нулю, поэтому рассмотрим выражения, стоящие над знаком двойного интеграла. Для вычисления выражения $(V_y - V_x)$ представим функцию Римана следующим образом:

$$V = \delta^{\frac{1}{2}}\cdot\omega\cdot F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\delta\right), \omega = \frac{x-y-z}{(x_0-x)^{\frac{1}{2}}(y-y_0)^{\frac{1}{2}}}.$$

При дифференцировании воспользуемся формулой [4]

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta^a F(a,b,c,\delta) = a\delta^{a-1}F(a+1,b,c,\delta)\delta'_x$$

а также формулой автотрансформации [4]

$$F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1,\delta\right) = (1-\delta)^{-1}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\delta\right).$$

Имеем

$$V_y - V_x = \frac{1}{2}\delta^{-\frac{1}{2}}(1-\delta)^{-1}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\delta\right)\cdot(\delta'_y - \delta'_x)\cdot\omega + +\delta^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\delta\right)\cdot$$

$$\cdot(\omega'_y - \omega'_x).$$

После ряда преобразований получаем

$$I_1(x,y,\varepsilon) = \left[\frac{V}{x-y-z} + \frac{1}{2}(V_y - V_x)\right]_{z\,=\,x-y-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x_0-x+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(y-y_0+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{(x_0-x)(y-y_0)}\left[\frac{x_0-x}{x_0-x+\varepsilon} + \frac{y-y_0}{y-y_0+\varepsilon}\right]\cdot F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\delta\right) + \tag{8}$$

$+\alpha(\varepsilon), \alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0.$

Очевидно

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_1(x,y,\varepsilon) = \frac{2}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)(x_0-x)^{\frac{1}{2}}(y-y_0)^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{9}$$

Обозначим

$$I_2(x,y,\varepsilon) = (u_{xz} - u_{yz})V\Big|_{z\,=\,x-y-\varepsilon}$$

и воспользуемся представлением функции Гаусса [4]

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\delta\right) = \frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}\left[2\psi(1) - 2\psi\left(\frac{1}{2}\right) - ln(1-\delta)\right]. \tag{10}$$

Тогда выражение I_2представимо в виде

$$I_2(x,y,\varepsilon) == \left\{(u_{xz}-u_{yz})(x-y-z)\Big|_{z\,=\,x-y-\varepsilon}\right\}\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)(x_0-x+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(y-y_0+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\left[2\psi(1) - 2\psi\left(\frac{1}{2}\right) - 2\,ln\sqrt{\varepsilon} + ln\frac{(x_0-x+\varepsilon)(y-y_0+\varepsilon)}{(x_0-x+y-y_0+\varepsilon)}\right]. \tag{11}$$

I_1 и I_2, определяемые формулами (8), (11) соответственно, подставляем в интегралы тождества (7) и переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом условий задачи (2)-(4), получаем после переобозначения переменных

$$u(x,y,z) = \tau(x,y) - \frac{1}{2\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{y}^{x-z} ds \int_{z+s}^{x} \frac{\mu(t,s)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}(s-y)^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{12}$$

$$\cdot\, ln\frac{(x-t)(s-y)}{x-t+s-y}\,dt-\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{y}^{x-z}ds\int\limits_{z+s}^{x}\nu(t,s)\frac{dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}(s-y)^{\frac{1}{2}}}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что если τ_{xy}, ν_{xy}, μ_{xy} непрерывны в своей области определения, то функция (12) является решением задачи C^* для уравнения (1). Единственность следует из метода Римана.

Литература:

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа // Высшая школа, Москва, 1985.
2. Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я., Быстрова О.К., Захаров В.Н. Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения, Изд. «Самарский ун-т», Самара, 1995, 76с.
3. Volkodavov V.F., Rodionova Y.N., Bushkov S.V. SOLUTION OF MODIFIED CAUCHY PROBLEM BY THE RIEMANNMETHOD FOR CERTAINSPATIAL ANALOG OF THE EULER-DARBOUX EQUATION WITH A NEGATIVE PARAMETER. Differential Equations. 2000. T.36 №4. C. 616-619.
4. Градштейн Н.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // Москва, Физматгиз, 1971.