ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Задача с локальными и интегральными условиями для уравнения гиперболического типа третьего порядка, вырождающегося на координатных плоскостях

Родионова Ирина Николаевна, доцент;
Бушков Станислав Владимирович, доцент
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

Полное уравнение гиперболического типа третьего порядка рассматривается на множестве, ограниченном плоскостями $x = h, y = h, y = -x, y = 0, z = 0, (h > 0)$. *Коэффициенты уравнения обращаются в бесконечность первого порядка на граничных плоскостях* $y = 0, z = 0$ *и на внутренней* $x = 0$. *Поставлена краевая задача с граничными условиями на плоскостях* $z = 0, y = 0$, *а также с условием, содержащим интеграл от искомого решения. На внутренних плоскостях* $y = x$ *и* $x = 0$ *задаются условия сопряжения, содержащие производные дробного порядка искомого решения. Методом интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.*

Ключевые слова: *уравнение гиперболического типа, краевая задача, интегральное уравнение.*

На множестве $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, где $H_1 = \left\{(x,y,z) \middle| \begin{matrix} 0 < x < y < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix}\right\}$,
$H_2 = \left\{(x,y,z) \middle| \begin{matrix} 0 < y < x < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix}\right\}$, $H_3 = \left\{(x,y,z) \middle| \begin{matrix} 0 < -x < y < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix}\right\}$, $h > 0$ рассматривается уравнение

$$U_{xyz} + \frac{\gamma}{z}U_{xy} + \frac{\beta}{y}U_{xz} + \frac{\alpha}{x}U_{yz} + \frac{\beta\gamma}{yz}U_x + \frac{\alpha\gamma}{xz}U_y + \frac{\alpha\beta}{xy}U_z + \frac{\alpha\beta\gamma}{xyz}U = 0, \tag{1}$$

$0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ $\alpha, \beta, \gamma - const$.

Части границы множества $H: z = 0, y = 0$ и внутренняя плоскость $x = 0$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения (1). Отметим, что впервые уравнение (1) было рассмотрено в работе [1], где для него в области $H1$ решена методом Римана задача Дарбу. В работах [2, 3] авторами введено интегральное представление одного из данных задачи Дарбу, в силу чего формула решения приобрела более простой вид, удобный для дальнейшего применения и может быть использована при решении новых краевых задач, в частности, предложенной в настоящей работе. Отметим, что представленные результаты являются продолжением исследований по постановке и решению краевых задач для уравнения (1) и его обобщений, опубликованных в работах [2-5].

Задача: На множестве H найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{z\to 0} z^\gamma U(x,y,z) = \begin{cases} f_1(x,y), (x,y) \in \overline{D_1}, \text{где } D_1 = \{0 < x < y < h\}; \\ f_2(x,y), (x,y) \in \overline{D_2}, \text{где } D_2 = \{0 < y < x < h\}; \\ f_3(x,y), (x,y) \in \overline{D_3}, \text{где } D_3 = \{0 < -x < y < h\}; \end{cases} \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^\beta U(x,y,z) = \chi(x,y), (x,z) \in \overline{D_0}, D_0 = \left\{(x,z) \middle| \begin{matrix} 0 < x < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix}\right\} \tag{3}$$

$$\int_{-y}^{0} U(t,y,z)t^\alpha dt = \varphi(y,z), (y,z) \in \overline{D_0}^*, D_0{}^* = \left\{(y,z) \middle| \begin{matrix} 0 < y < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix}\right\}, \tag{4}$$

с сопряжением на внутренней характеристической плоскости $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0+0} x^\alpha U(x,y,z) = \lim_{x\to 0-0} (-x)^\alpha U(x,y,z), \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\partial}{\partial x} \int_x^y t^\alpha (t-x)^{-r_1} U(t,y,z)dt = \lim_{x\to 0-0} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-y}^x t^\alpha (x-t)^{-r_2} U(t,y,z)dt \tag{6}$$

$$(0 < r_1, r_2 < 1)$$

и на нехарактеристической плоскости $y = x$:

$$\lim_{x\to 0+0} U(x,y,z) = \lim_{x\to 0-0} U(x,y,z), \tag{7}$$

$$\lim_{x\to x+0} (U_x - U_y) = \lim_{x\to x-0} \left[U_x - U_y + \frac{2\alpha}{x}U(x,y,z)\right] + \frac{\partial}{\partial x}U(x,x-0,z). \tag{8}$$

Условия, налагаемые на заданные функции $f_k, k = \overline{1,3}, \chi, \varphi$ сформулируем позже.

Опираясь на результаты работ [1-3], запишем решение задачи Дарбу для уравнения (1) в каждой из областей $H_i, i = \overline{1,3}$, и возьмем его за основу решения поставленной задачи. В области H_1 имеем:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{x^\beta y^\beta}\int_0^x T_1(s,z)s^{2\beta}ds + \frac{1}{x^\alpha y^\beta}\int_x^y N_1(s,z)s^{\alpha+\beta}ds + z^{-\gamma}f_1(x,y), \text{где} \tag{9}$$

$$U(x,x+0,z) = \int_0^x T_1(s,z)\left(\frac{s}{x}\right)^{2\beta} ds, \tag{10}$$

$$N_1 = \frac{1}{2}[T_1 - \nu_1], \nu_1 = \lim_{y\to x+0}(U_x - U_y). \tag{11}$$

В области H_2:

$$U(x,y,z)=\frac{1}{x^{\alpha}y^{\alpha}}\int_0^y T_2(s,z)s^{2\alpha}ds+\frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}}\int_y^x N_2(s,z)s^{\alpha+\beta}ds+z^{-\gamma}f_2(x,y),\text{ где} \quad (12)$$

$$U(x,x-0,z)=\int_0^x T_2(s,z)\left(\frac{s}{x}\right)^{2\alpha}ds, \quad (13)$$

$$N_2=\frac{1}{2}[T_2+\nu_2],\nu_2=\lim_{y\to x-0}(U_x-U_y). \quad (14)$$

И в области H_3:

$$U(x,y,z)=\int_x^0 T_3(s,z)\frac{(-s)^{2\beta}ds}{(-x)^{\beta}y^{\beta}}+\frac{1}{(-x)^{\alpha}y^{\beta}}\int_{-y}^x N_3(s,z)(-s)^{\alpha+\beta}ds+z^{-\gamma}f_3(x,y),\text{ где} \quad (15)$$

$$U(x,-x+0,z)=\int_x^0 T_3(s,z)\left(\frac{s}{x}\right)^{2\beta}ds, \quad (16)$$

$$N_3=\frac{1}{2}[T_3+\nu_3],\nu_3=\lim_{y\to -x+0}(U_x+U_y). \quad (17)$$

Решение уравнения (1), определяемое формулами (9), (12), (15), удовлетворяет условию (2) поставленной задачи. Неизвестные функции T_k,N_k $(k=\overline{1,3})$ ищем в классе функций, для которых выполняются

Условия I: $N_k(x,z)x^{\alpha+\beta}$ $(k=1,2),N_3(-x,z)(-x)^{\alpha+\beta},T_1x^{2\beta},T_2x^{2\alpha},T_3(-x,z)(-x)^{2\beta}$ непрерывны в области D_0 вместе со своими частными производными по переменной z и абсолютно интегрируемы по x на сегменте $[0,h]$ при любом $z\in[0,+\infty)$.

Выведем основные соотношения для неизвестных функций из условий поставленной задачи. Из условий (3), (4) после ряда преобразований имеем:

$$\frac{1}{x^{\alpha}}\int_0^x N_2(s,z)s^{\alpha+\beta}ds=\chi(x,z), \quad (18)$$

$$\int_{-y}^0 T_3(t,z)(-t)^{2\beta}dt+y^{1+2\beta}N_3(-y,z)=y^{\beta-\alpha}\,[\varphi(y,z)y^{\beta}]'_y. \quad (19)$$

Сопряжение на плоскости $y=x$ (7), (8) приводит к равенствам

$$\int_0^x T_1(s,z)\left(\frac{s}{x}\right)^{2\beta}ds=\int_0^x T_2(s,z)\left(\frac{s}{x}\right)^{2\beta}ds, \quad (20)$$

$$N_1(x,z)+N_2(x,z)=\frac{1}{2}T_1(x,z). \quad (21)$$

Из условий (5), (6) получаем соответственно

$$N_1(y,z)=N_3(-y,z), \quad (22)$$

$$-N_1(y,z)y^{\alpha+\beta-r_1}+r_1y^{-r_1+\alpha-\beta-1}\int_0^y T_1(s,z)s^{2\beta}ds$$
$$=N_3(-y,z)y^{\alpha+\beta-r_2}-r_2y^{-r_2+\alpha-\beta-1}\int_{-y}^0 T_3(s,z)(-s)^{2\beta}ds. \quad (23)$$

Задачу будем решать в предположении, что $\beta>\alpha$ (24). (24)

Из формулы (18) имеем $N_2(x,z)x^{\alpha+\beta}=[\chi(x,z)x^{\alpha}]'_x$. (25)

Из соотношения (21), с учетом (25), получаем

$$T_1(x,z)=2N_1(x,z)+2x^{-\alpha-\beta}[x^{\alpha}\chi(x,z)]'_x. \quad (26)$$

Подставляя выражение (26) в формулу (23), с учетом равенств (19) - (22), приходим к интегральному уравнению

$$N_1(y,z)y^{2\beta}=\frac{\sigma_1(y)}{y}\int_0^y N_1(t,z)t^{2\beta}dt+F_2(y,z), \quad (27)$$

$$\text{где } F_2(y,z)=\frac{\sigma_2(y)}{y^{1+\alpha-\beta}}[\varphi(y,z)y^{\beta}]'_y+\frac{\sigma_1(y)}{y}\int_0^y s^{\beta-\alpha}[s^{\alpha}\chi(s,z)]'_s dt, \quad (28)$$

$$\sigma_1(y)=\frac{2r_1}{1+(1+r_2)y^{r_1-r_2}},\sigma_2(y)=\frac{2r_2}{1+r_2+y^{r_2-r_1}}. \quad (29)$$

Методом последовательных приближений [6] получаем решение уравнения (27)

$$N_1(y,z)y^{\alpha+\beta}=\frac{\sigma_1(y)}{y^{1+\beta-\alpha}}\int_0^y F_2(t,z)\exp\left(\int_t^y\frac{\sigma_1(\tau)d\tau}{\tau}\right)dt+F_2(y,z)y^{\alpha-\beta}. \quad (30)$$

$N_3(-y,z)$ получаем из формулы (30) согласно соотношению (22). Отметим, что для $\sigma_1(y)$ имеет место оценка $0<\sigma_1(y)<2$, из чего, с применением теоремы о среднем, получаем

$$\exp\left(\int_t^y \frac{\sigma_1(\tau)d\tau}{\tau}\right)=\exp\left(\sigma_1(\tau^*)\int_t^y \frac{d\tau}{\tau}\right)<\left(\frac{y}{t}\right)^2. \qquad (31)$$

Из соотношений (26), (30) находим

$$\int_0^x T_1(s,z)s^{2\beta}ds=2\left(\int_0^x F_2(t,z)exp\left(\int_t^x \frac{\sigma_1(\tau)d\tau}{\tau}\right)dt+y^{-\alpha}\chi(y,z)\right)+2\alpha\int_0^y s^{-1-\alpha}\chi(s,z)ds,$$

а из (19), (20) находим интегралы $\int_0^x T_2(s,z)s^{2\alpha}ds$ и $\int_{-y}^0 T_3(t,z)(-t)^{2\beta}dt.$

Чтобы получить в явном виде решение поставленной задачи подставим найденные выражения функций $N_k y^{\alpha+\beta}, k=1,2, N_3(-y)^{\alpha+\beta}$ и интегралов, содержащих функции $T_k, k=\overline{1,3}$ в формулы (9), (12), (15). Из – за громоздкости полученных результатов все формулы не приводим, в качестве примера запишем вид решения в области H_2:

$$U(x,y,z)=2x^{\alpha-2\beta}y^{-\alpha}\left[\int_0^y F_2(t,y)exp\left(\int_t^y \frac{\sigma_1(\tau)d\tau}{\tau}\right)dt+2\alpha\int_0^y s^{-1-\alpha}\chi(s,z)ds+y^{-\alpha}\chi(y,z)\right]+\frac{\chi(x,z)}{y^\beta}$$
$$-y^{\alpha-\beta}\frac{\chi(y,z)}{x^\alpha}+z^{-\gamma}f_2(x,y).$$

Сформулируем условия, налагаемые на данные задачи. При этом будем исходить из следующего:

1. Найденные функции удовлетворяют условиям I;
2. Исходя из оценки (31) обеспечить существование интеграла

$$\int_0^y F_2(t,y)\exp\left(\int_t^y \frac{\sigma_1(\tau)d\tau}{\tau}\right)dt.$$

<u>Условие A</u>. Имеет место представление

$$\chi(x,z)=x^2\chi^*(x,z)$$
$$\chi^*(x,z)\in C(\overline{D_0})\cup C^{(1)}(D_0).$$

<u>Условие B</u>. 1) $f_k(x,y)\in C(\overline{D_k}), \frac{\partial f_k}{\partial x\partial y}\in C(D_k), k=\overline{1,3}$

$$f_1(0,y)=f_3(0,y)=f_1(x,x)=f_2(x,x)=f_2(x,0)=0.$$

Причём f_1 при $x=0$ обращается в ноль порядка выше $-\alpha+r_1$, f_3 - порядка выше $-\alpha+r_2$.

2) $\int_0^y [r_1t^{-r_1-1+\alpha}f_1(t,y)+r_2t^{-r_2-1+\alpha}f_3(-t,y)]dt=0.$

<u>Условия C</u>. Имеет место представление:

$$\varphi(y,z)=y^3\varphi^*(y,z)$$
$$\varphi^*(y,z)\in C(\overline{D_0^*})\cup C^{(1)}(D_0^*).$$

Единственность решения поставленной задачи следует из единственности решения задачи Дарбу, взятого за основу и однозначной разрешимости интегрального уравнения, к которому свелась задача. Существование решения доказано проверкой. Также проверкой установлено, что при выполнении условий A, B, C в каждой из областей $H_k, k=\overline{1,3}$ решение непрерывно вместе со своими производными, входящими в уравнение (1). На внутренней плоскости $x=0$ имеет место особенность порядка α. На граничных плоскостях $y=0$ и $z=0$ особенность порядка β и γ соответственно. На остальных частях границы множества H – плоскостях $x=h, y=h, y=-x$ решение непрерывно.

Литература:

1. Захаров В.Н. Краевая задача для одного уравнения вырождающегося на координатных плоскостях. Доклады 52-ой научной конференции СГПУ (сборник трудов). Самара 1998, с. 49-53.
2. Долгополов В.М., Родионова И.Н. Две задачи для пространственного аналога гиперболического уравнения третьего порядка // Вест. Сам. госуд. техн. ун-та. Сер. Физико-матем. науки, - 2012, - №4 (29), - с. 212-217.
3. Родионова И.Н. Задача с интегральным условием для одного пространственного уравнения гиперболического типа, вырождающегося на координатных плоскостях // Вест. Сам. госуд. техн. ун-та. Сер. Физико-матем. науки. - 2011, №2 (23) - с. 189-193.
4. И.Н. Родионова, В.М. Долгополов Задачи с сопряжением на характеристической плоскости для одного гиперболического уравнения третьего порядка в трёхмерном пространстве // Вест. Сам. госуд. техн. ун-та. Сер. Физико-матем. науки. - 2014, №1 (34) - с. 48-55.
5. Бушков С.В., Родионова И.Н. О постановке краевых задач в области специального типа для одного гиперболического уравнения третьего порядка в трёхмерном евклидовом пространстве//ScienceTime.– 2015. – №1 (13). – с. 53-60. Казань.
6. С.Г. Михлин. Интегральные уравнения. М. – Л.: ОГИЗ, 1947.