ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION

Характеристики СМО M/G/1 с бесконечным накопителем и постоянной интенсивностью входного потока

Бондрова Олеся Васильевна, ассистент;
Головко Николай Иванович, д.т.н., профессор
Дальневосточный федеральный университет

Основной задачей теории систем массового обслуживания (СМО) является изучение режима функционирования обслуживающей системы и исследование явлений, возникающих в процессе обслуживания. Так, одной из характеристик обслуживающей системы является время пребывания заявки в очереди. Очевидно, что это время можно сократить за счет увеличения количества обслуживающих устройств. Однако каждое дополнительное устройство требует определенных затрат, при этом увеличивается время бездействия обслуживающего устройства из-за отсутствия требований на обслуживание, что также является негативным явлением. Следовательно, в теории массового обслуживания возникают задачи оптимизации определенного уровня обслуживания (максимального сокращения очереди или потерь требований) при минимальных затратах, связанных с простоем обслуживающих устройств [1]. Для решения указанных задач оптимизации часто используются математические модели СМО. Они удобны для описания отдельных современных вычислительных систем, таких как процессор-винчестер, канал ввода-вывода и т.д. Вычислительная система в целом представляет собой совокупность взаимосвязанных систем.

Одним из важных вероятностных процессов теории массового обслуживания (ТМО) является незавершенная работа, с помощью которой прогнозируется время ожидания в СМО. Незавершенная работа – это время необходимое СМО для освобождения от всех заявок, находящихся в ней в момент времени t. В момент прихода заявок незавершенная работа равна времени ожидания заявкой начала обслуживания.

Результаты исследования незавершенной работы в классической СМО с постоянными параметрами представлены в работах [1, 2, 3] и в ряде других, в которых получены следующие результаты:

1. выведены уравнения относительно стационарных и нестационарных характеристик незавершенной работы;
2. получены преобразования Лапласа-Стилтьеса относительно незавершенной работы;
3. рассмотрены вопросы аналитичности преобразования Лапласа-Стилтьеса.

Однако в указанных работах остался не решенным ряд теоретических вопросов.

В данной работе рассматривается СМО M/G/1 с простейшим пуассоновским входным потоком заявок с интенсивностью λ, с одним прибором, бесконечным накопителем, общим законом обслуживания. Обозначим через $B_{\overline{\eta}}(u)$ – функцию распределения времени обслуживания $\overline{\eta}$: $B_{\overline{\eta}}(u) = P\{\overline{\eta} < u\}$.

Описанную СМО M/G/1 с простейшим пуассоновским входным потоком заявок с постоянной интенсивностью λ в дальнейшем будем называть классической.

Предполагаем, что выполняется условие отсутствия перегрузок. В общем случае условие отсутствия перегрузок имеет вид

(1) $\lambda < 1/\overline{\eta}$ или $\lambda\overline{\eta} < 1$,

где $\overline{\eta}$ – среднее время обслуживания, $\overline{\eta} = \int_0^\infty \omega dB(\omega)$.

Обозначим через $U(t)$ – незавершенную работу системы в момент времени t. В момент прихода очередной заявки незавершенная работа равна времени ожидания заявкой начала обслуживания.

Обозначим через $P_k(t)$, $k \geq 0$, нестационарное распределение числа заявок в СМО, через p_k, $k \geq 0$, стационарное распределение числа заявок в СМО.

Обозначим через $\mathbf{H}(\omega,t) = P\{U(t) \leq \omega\}$ – нестационарную функцию распределения незавершенной работы в стационарном режиме, а через $\mathbf{h}(\omega)$ – стационарную функцию распределения в стационарном режиме.

Стационарный режим – это режим функционирования СМО, при котором свойства СМО не меняются с течением времени. В данный режим можно попасть двумя способами: либо через стабилизацию нестационарного решения при произвольных начальных условиях, либо при начальных условиях $P_k(0) = p_k$, $k \geq 0$, СМО находится в стационарном режиме в любой момент времени $t \geq 0$.

В частности, в качестве $\mathbf{h}(\omega)$ можно рассматривать предел $\mathbf{h}(\omega) = \mathbf{lim}\,\mathbf{H}(\omega,t)$ при $t \to \infty$.

Обозначим моменты незавершенной работы в стационарном режиме:

– среднее значение (матожидания) незавершенной работы

$$MU = \int_{0^-}^{\infty} \omega h(\omega) d\omega,$$

– дисперсия незавершенной работы

$$DU = \int_{0^-}^{\infty} (\omega - MU)^2 h(\omega) d\omega \cdot$$

Нестационарная функция распределения $\mathbf{H}(\omega,t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Такача следующего вида:

(2) $$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}(\omega,t) = -\lambda\,\mathbf{H}(\omega,t) + x\int_0^\omega B(\omega - s)\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{H}(u,t)du + \frac{\partial\,\mathbf{H}(\omega,t)}{\partial\omega}, \omega > 0,$$ с

начальным условием

(3) $$\mathbf{H}(\omega,0) = \xi(\omega),$$

с односторонним краевым условием по ω:

(4) $$\mathbf{H}(0^+,t) = P_0(t).$$

Стационарная функция распределения $\mathbf{h}(\omega)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Такача следующего вида:

(5) $$-\lambda\mathbf{h}(\omega)+x\int_0^{\omega}B(\omega-u)\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{h}(u)du+\frac{\partial}{\partial\omega}\mathbf{h}(\omega),\omega>0,$$

с односторонним краевым условием $\mathbf{h}(0^+)=p_0$, где p_0 – вероятность того, что в СМО в стационарном режиме нет заявок. Вероятность p_0 приводится в работе [1]: $p_0=1-\rho$.

Введем преобразование Лапласа $\mathbf{h}^*(r)$, $B^*(r)$ по переменной r, с выполненным интегрированием по переменной ω:

(6) $$\mathbf{h}^*(r)=\int_{0^-}^{\infty}\mathbf{h}(\omega)d\omega,\ B^*(r)=\int_{0^-}^{\infty}e^{-\omega r}B(\omega)d\omega,\ \mathbf{Re}\,r>0,$$

и преобразования Стилтьеса $\mathbf{h}_c(r,t)$, $B_c(r)$, по переменной r, с выполненным интегрированием по переменной ω:

(7)
$$\mathbf{h}_c(r)=\int_{0^{-}}^{\infty}e^{-\omega r}h(\omega)d\omega,\ B_c(r)=\int_{0^-}^{\infty}e^{-\omega r}B'(\omega)d\omega,$$
$$\mathbf{Re}\,r>0,$$

которые связаны соотношениями

(8) $$\mathbf{h}^*(r)=\frac{\mathbf{h}_c(r)+h(0^-)}{r}\ B^*(r)=\frac{B_c(r)+B(0^-)}{r}.$$

Так как $h(0^-)=B(0^-)=0$, то $\mathbf{h}^*(r)=\frac{\mathbf{h}_c(r)}{r}$, $B^*(r)=\frac{B_c(r)}{r}$.

Относительно данной СМО получены следующие результаты.

Теорема. Для классической СМО типа M/G/1 при условии отсутствия перегрузок (1) следует:

1) преобразование Стилтьеса относительно стационарной функции распределения незавершенной работы имеет вид:

(9) $$\mathbf{h}^*(r)=\frac{r(1-\rho)}{r+\lambda B_c(r)-\lambda};$$

2) существует единственное решение уравнения (2) относительно нестационарной функции распределения $\mathbf{H}(\omega,t)$ с заданным начальным условием (3) и краевым условием (4);

3) выполняется равномерная сходимость нестационарного решения уравнения (2) к стационарному решению уравнения (5).

4) существует единственное стационарное решение уравнения (5);

5) моменты незавершенной работы выражаются через преобразование Стилтьеса единственного решения уравнения (5) следующим образом:

(10) $$MU=-\mathbf{h}_c'(0),\ DU=(\rho_0-1)(MU)^2+\mathbf{h}_c''(0).$$

Глубокое и полное исследование незавершенной работы в СМО M/G/1 необходимо для последующего анализа незавершенной работы в СМО с дважды стохастическим пуассоновским входным потоком заявок со случайной интенсивностью.

Литература:

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том. 2/Пер. с англ. Ю. В. Прохорова. М., Мир, 1967. – 752 с.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979.
3. Хинчин А. Я. Математическая теория стационарной очереди. – В кн.: Математический сборник. М., 1932. т. 39. – С. 73-84.