ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Двумерный аналог одной теоремы Ф. Рисса

Битимхан Самат, к.ф.-м.н., доцент
Алибиева Динара Тулеутаевна, докторант
Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (Казахстан)

В теории функций известна следующая теорема Ф. Рисса [1]: для того, чтобы функция $F(x)$ $(a \le x \le b)$ была представлена в виде

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)dt$$

где $f(t) \in L_p\,(p > 1)$, необходимо и достаточно, чтобы при всяком подразделении $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|F(x_{i+1}) - F(x_i)|^p}{(x_{i+1} - x_i)^{p-1}} \le K < \infty$$

где K не зависит от способа подразделения $[a;b]$.

Разные обобщения этой теоремы получены в работах [2] - [4]. Нашей целью является обобщение необходимой части теоремы для функций двух переменных F, когда под интегралом стоит функция из некоторых других пространств.

Приведем необходимые определения.

Пусть $J = [a;b] \times [c;d], a, b, c, d > 0$. Пусть $W(x,y)$ неотрицательная функция, определенная на J. Через $L_{p,w}(J)$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу на J функций f, для которых

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_a^b \int_c^d |f(x,y)|^p \cdot W(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, 1 \le p < +\infty$$

$L_{p,w}$ называется весовым пространством Лебега.

При $W(x,y) \equiv 1$ на J пространство $L_{p,w}$ совпадает с пространством Лебега L_p.

Будем считать, что функция $W(x,y)$ удовлетворяет A_p- условию [5] (будем писать $W \in A_p$), если

$$\sup_{B \subset J} \left(\frac{1}{|B|} \cdot \iint_B W(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{1}{|B|} \cdot \iint_B (W(x,y))^{\frac{1}{1-p}}dxdy\right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(t)$ четная, неотрицательная, неубывающая на $[0; +\infty)$;
2) $\varphi(t^2) \le C \cdot \varphi(t), t \in [0; +\infty), C \ge 1$;
3) $\frac{\varphi(t)}{t^\varepsilon} \downarrow$ на $(0; +\infty)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Измеримая 2π – периодическая по каждой переменной функция $f \in L_p\varphi(L_p)(J)$, если (см. например [6])

$$\int_a^b \int_c^d |f(x,y)|^p \cdot \varphi(|f(x,y)|^p)\, dx\, dy < +\infty.$$

Теперь приведем полученные нами обобщения вышеуказанной теоремы Ф. Рисса.

Теорема 1. ПустьF – действительная функция двух переменных, заданная на прямоугольнике J и $W \in A_p$. Тогда, если имеет место представление

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(s,t)dsdt + \int_a^x g(s)ds + \int_c^y h(t)dt + F(a,c)\,, (1)$$

где $f \in L_{p,w}(J)$, g и h интегрируемые функции, то для некоторого числа K, не зависящего от способа разбиения прямоугольника J выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\left|F(x_{i+1}, y_{j+1}) - F(x_i, y_{j+1}) - F(x_{i+1}, y_j) + F(x_i, y_j)\right|^p}{\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} [W(s,t)]^{-\frac{p'}{p}} dsdt\right)^{p-1}} \le K.$$

Доказательство. Пусть имеет место представление (1). Тогда получим:

$$\left|F(x_{i+1}, y_{j+1}) - F(x_i, y_{j+1}) - F(x_{i+1}, y_j) + F(x_i, y_j)\right| =$$

$$= \left| \int_a^{x_{i+1}} \int_c^{y_{j+1}} f(s,t)dsdt + \int_a^{x_{i+1}} g(s)ds + \int_c^{y_{j+1}} h(t)dt + F(a,c) - \right.$$

$$- \int_a^{x_i} \int_c^{y_{j+1}} f(s,t)dsdt - \int_a^{x_i} g(s)ds - \int_c^{y_{j+1}} h(t)dt - F(a,c) -$$

$$-\int_a^{x_{i+1}}\int_c^{y_j} f(s,t)dsdt-\int_a^{x_{i+1}} g(s)ds-\int_c^{y_j} h(t)dt-F(a,c)+$$
$$+\int_a^{x_i}\int_c^{y_j} f(s,t)dsdt+\int_a^{x_i} g(s)ds+\int_c^{y_j} h(t)dt+F(a,c)\Bigg|=$$
$$=\left|\int_a^{x_{i+1}}\left[\int_c^{y_{j+1}} f(s,t)dt-\int_c^{y_j} f(s,t)dt\right]ds-\int_a^{x_i}\left[\int_c^{y_{j+1}} f(s,t)dt-\int_c^{y_j} f(s,t)dt\right]ds\right|=$$
$$=\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(s,t)dsdt\right|. (2)$$

Далее, применяя неравенство Гельдера, получим:

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(s,t)dsdt\right|=\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(s,t)W^{\frac{1}{p}}(s,t)\cdot W^{-\frac{1}{p}}(s,t)dsdt\right|\le$$
$$\le\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}|f(s,t)|^p\cdot W(s,t)dsdt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}[W(s,t)]^{-\frac{p'}{p}}dsdt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

для любых $i=1,\dots,l-1$ и $j=1,\dots,m-1$.

Отсюда в силу (2) имеем:

$$\frac{\left|F(x_{i+1},y_{j+1})-F(x_i,y_{j+1})-F(x_{i+1},y_j)+F(x_i,y_j)\right|^p}{\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}[W(s,t)]^{-\frac{p'}{p}}dsdt\right)^{\frac{p}{p'}}}\le$$
$$\le\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}|f(s,t)|^p\cdot W(s,t)dsdt,$$

для любых $i=1,\dots,l-1$ и $j=1,\dots,m-1$.

Наконец, складывая эти неравенства по i и по j получим:

$$\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\left|F(x_{i+1},y_{j+1})-F(x_i,y_{j+1})-F(x_{i+1},y_j)+F(x_i,y_j)\right|^p}{\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}[W(s,t)]^{-\frac{p'}{p}}dsdt\right)^{p-1}}\le$$
$$\le\int_a^b\int_c^d|f(s,t)|^p\cdot W(s,t)dsdt=K.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть функция$\varphi(t)$удовлетворяет условиям 1) - 3) и F действительная функция двух переменных, заданная на прямоугольнике J.

Пусть имеет место представление

$$F(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(s,t)dsdt+\int_a^x g(s)ds+\int_c^y h(t)dt+F(a,c),$$

где $f\in L_p\varphi(L_p)(J)$, а g и h интегрируемые функции.

Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\left|F(x_{i+1},y_{j+1})-F(x_i,y_{j+1})-F(x_{i+1},y_j)+F(x_i,y_j)\right|^p}{\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\varphi^{-\frac{p'}{p}}(|f(s,t)|^p)dsdt\right)^{\frac{p}{p'}}}\le M,$$

где M не зависит от способа разбиения прямоугольника J.

Доказательство. Пользуясь равенством (2) в силу неравенства Гельдера для всех $i=1,\dots,l-1$ и $j=1,\dots,m-1$ получим:

$$\left|F(x_{i+1},y_{j+1})-F(x_i,y_{j+1})-F(x_{i+1},y_j)+F(x_i,y_j)\right|=\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(s,t)dsdt\right|=$$
$$=\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(s,t)\varphi^{\frac{1}{p}}(|f(s,t)|^p)\cdot\varphi^{-\frac{1}{p}}(|f(s,t)|^p)dsdt\right|\le$$
$$\le\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}|f(s,t)|^p\varphi(|f(s,t)|^p)dsdt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\varphi^{-\frac{p'}{p}}(|f(s,t)|^p)dsdt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\left|F(x_{i+1},y_{j+1})-F(x_i,y_{j+1})-F(x_{i+1},y_j)+F(x_i,y_j)\right|^p}{\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\varphi^{-\frac{p'}{p}}(|f(s,t)|^p)dsdt\right)^{\frac{p}{p'}}}\le\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}|f(s,t)|^p\,\varphi(|f(s,t)|^p)dsdt,$$

для любых $i=1,\dots,l-1$ и $j=1,\dots,m-1$.

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\left|F(x_{i+1},y_{j+1})-F(x_i,y_{j+1})-F(x_{i+1},y_j)+F(x_i,y_j)\right|^p}{\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\varphi^{-\frac{p'}{p}}(|f(s,t)|^p)dsdt}\le$$

$$\le\int\limits_a^b\int\limits_c^d|f(s,t)|^p\,\varphi(|f(s,t)|^p)dsdt=M.$$

Теорема доказана.

Литература:

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, - 1950.
2. Riesz F. Sur certains systems singuliers d'equations integrales. //Ann. Eq. Norm, - 1911,V.28, № 3. - P. 36-65.
3. Медведев Ю.Т. Обобщение одной теоремы Ф. Рисса. //УМН, - 1953, Т.8, № 6(58). - С. 115-118.
4. Талалян Ф.А. О многомерном аналоге одной теоремы Ф. Рисса. // Математический сборник. - 1995, Т. 186, № 9. - С. 135-146.
5. Muckenhoupt B. Weigthed norm inequalities for the Hardy maximal functions. // Trans. Amer. Math. Soc., - 1972, V. 165, - P. 207-225.
6. Bitimkhan S. Hardy – Littlewood theorem for series with general monotone coefficients. //Bulletin of the Karaganda University. Mathematics. - 2018, 2(90), - P. 43-48.