www.esa-conference.ru

Псевдопрямоугольные числа

Баяндин Александр Васильевич

Аннотация. *В отличие от известных прямоугольных чисел, т.н. псевдопрямоугольные числа включают в свой состав не только четные числа, но и нечетные числа - все числа натурального ряда чисел. Предложенный в статье метод позволяет произвольное целое число представить в виде его фрагментации произведением двух иррациональных чисел.*

Ключевые слова: *число* π*,золотое сечение, прямоугольные, псевдопрямоугольные числа.*

Annotation. *Unlike the well-known rectangular numbers, the so-called. pseudo-rectangular numbers include not only even numbers, but also odd numbers - all the numbers in the natural series of numbers. The method proposed in the article allows an arbitrary integer number to be represented in the form of its fragmentation by the product of two irrational numbers.*

Keywords: *number* π*, golden ratio, rectangular, pseudo-rectangular numbers.*

1.Интересное выражение для числа π получается при анализе зависимости изменения величины дуги окружности от значения стягивающей хорды.

В итоге анализа была получена следующая рекуррентная формула [1]:

$$\frac{\cup L_n}{H_n} = \frac{\pi}{2^n \cdot \sqrt{2_1 - \sqrt{2_2 + \sqrt{2_3 + \sqrt{2_4 + \cdots + \sqrt{2_n}}}}}}; \tag{1}$$

Так, при n=1 длина хорды равна $H_1 = R \cdot \sqrt{2}$, а – дуги $\cup L_1 = \frac{\pi \cdot R}{2}$;

n=2, $H_2 = R \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\cup L_2 = \frac{\pi R}{4}$ и т.д.

В пределе, при n → ∞, отношение (1) стремится к единице:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cup L_n}{H_n} = 1 \tag{2}$$

Учитывая (2) из (1) получим выражение для числа π:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \sqrt{2_1 - \sqrt{2_2 + \sqrt{2_3 + \cdots + \sqrt{2_n}}}} \tag{3}$$

Или опуская символ *lim* и, подразумевая, что $n \to \infty$:

$$\pi = 2^n \cdot \sqrt{2_1 - \sqrt{2_2 + \sqrt{2_3 + \cdots + \sqrt{2_n}}}} \qquad (4)^1$$

Анализ полученной формулы интересен уже сам по себе. Во-первых, в полученном выражении содержатся только одни двойки степени и под корнем.

Во-вторых, выражение содержит произведение двух функций:

- показательной функции $F(n)=2^n$,

- степенной функции $X_n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2_n}}}}$ представленных на рис.1.

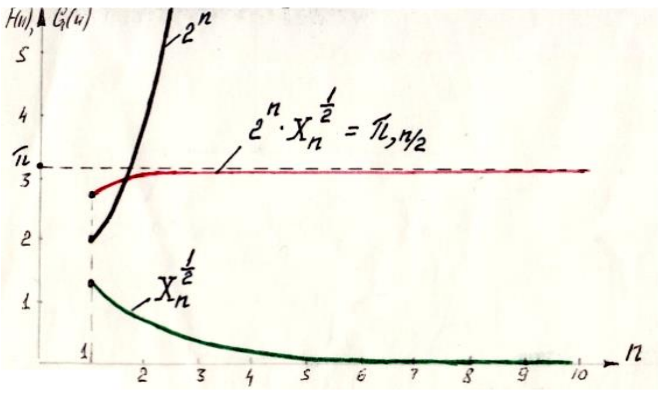

Рис. 1.

Выражение (4) носит название «формулы» Антифонта [2], греческого математика V века до н.э.[2]

[1] Данная простая формула выведена мной примерно в 1987г. В таком виде – послана в редакцию журнала “КВАНТ” в 1989г.

[2] Формула Антифонта. http://altera-pars.narod.ru/Qadra/form_A.htm

Предел произведения этих функций и, соответственно, приближение числа π представляет собой неопределенность (3)вида: $\infty \cdot 0$ и замечателен уже тем, что объединяет бесконечно большие и бесконечно малые величины в одном иррациональном числе π.

Прежде, чем рассмотреть численный результат полученной формулы, проведем анализ обобщенной формулы:

$$K(n)=q^n\cdot\sqrt{q_1-\sqrt{q_2+\sqrt{q_3+\cdots+\sqrt{q_n}}}} \quad (5)$$

Целесообразно анализ начать с выражения под корнем, а именно, с бесконечного корня:

$$X_n=\sqrt{q_2+\sqrt{q_3+\sqrt{q_4+\cdots+\sqrt{q_n}}}} \quad (6)$$

При n→ ∞ можно записать:

$$X=\sqrt{q+x}\text{, или } x^2-x-q=0 \quad (7)$$

$$\text{где } q=x(x-1), \quad (8)$$

$$\text{а } x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4q}}{2} \quad (9)$$

В частности, в нашем случае, при $q = 2$ получаем $x = 2$, т.е. представленное решение (9) является пределом выражения (6) при n→ ∞ .

При $q = 1$ из (9) и, соответственно, из (6) получим *x = 1.6180339…, так называемое число, характеризующее* ***золотое соотношение*** (сечение отрезка прямой на две неравные части).

Подставив $q=1$ *и* $q=2$ в выражение (6) получим следующие значения:

$$1{,}6180339\ldots=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}\text{ и } 2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \quad (10)$$

Необходимо также отметить, что число 2 для формулы (5) является оптимальным. Последнее можно пояснить на примере анализа выражения:

$$Y(n)=\sqrt{q_1-\sqrt{q_2+\sqrt{q_3+\cdots+\sqrt{q_n}}}} \quad (11)$$

При n→ ∞ найдем значение q, при котором $Y=0$. Для этого подставим (9) в отрицательную часть подкоренного выражения (11):

$q-\frac{1+\sqrt{1+4q}}{2}=0$, решая это уравнение, получим значение $q = 2$. Что и требовалось доказать.

Следовательно, только для $q = 2$ формула (5) дает приближение для числа π.

Используя формулу (8): $q = x(x-1)$ выражение (6) приобретает следующую форму:

$$x=\sqrt{x(x-1)+\sqrt{x(x-1)+\sqrt{x(x-1)+\cdots+\sqrt{x(x-1)}}}} \quad (12)$$

Интересно, что бесконечный квадратный корень выражения (12) дает приближение ко всем произвольным целым числам натурального ряда за исключением нуля и единицы. Так как при $q = x(x-1) = 1$ значение золотого сечения *x = 1,6180339, о чем мы уже упоминали выше в этой статье.* И, что парадоксально, при $x = 1$, т.е при $q = 0$ выражение (12) приобретает совсем уж «странный» вид:

$$1=\sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\cdots+\sqrt{0}}}}} \quad (13)$$

Естественно, что это не так. Под значением 0 здесь нужно понимать бесконечно малую величину.

Сведем рассчитанные значения для формулы (6)

$X_n=\sqrt{q_1+\sqrt{q_2+\sqrt{q_3+\cdots+\sqrt{q_n}}}}$, где q принимает значения чисел натурального ряда, в таблицу:

Таблица 1.

q	$q=x(x-1)$	X_n
0	0	1
1		φ =1.6180339
2	2	2
3		2.3027756
	6	3
4		2.5615528
	12	4
5		2.7912878
	20	5

q	$q=x(x-1)$	X_n
6		3
	30	6
7		3.1925824
	42	7
8		3.3722813
	56	8
9		3.5413812
	72	9
10		3.7015621

q	*q =x(x-1)*	X_n
	90	10
11		3.8541019
	110	11
12		4
	132	12
13		4.1400549

q	*q =x(x-1)*	X_n
	156	13
14		4.2749172
	182	14
15		4.4051248
	210	15

Приведенные значения X_n в Таблице 1, соответствующие аргументам q, обладают, как и золотое соотношение $\varphi = 1.6180339$, хотя это и очевидно из приведенного выше анализа, удивительным свойством: *квадрат значения* X_n ***не изменяет значения мантиссы*** этого числа и равен:

$$X_n^2 = q_n + X_n \tag{14}$$

Так, например, X_{11}^2 = (3.**8541019**)^2= 14.**8541019** = $q_n + X_n$ =11+3.**8541019**.

Из (14) следует, что:

$$Q_n = X_n^2 - X_n = X_n(X_n - 1) \tag{15}$$

Например, *1 = 1,6180339·0,6180339 =* $X_1(X_1 - 1)$; *3 = 2.3027756·1,3027756;*

4 =2.5615528·1.5615528 и т.д.

Как известно, пара целых чисел, отличающихся на 1 (единицу) друг от друга, при перемножении образуют «площадь» прямоугольника и, поэтому, называются *прямоугольными числами* **[3],** например: 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, 240, 272, 306, 342, 380, 420, … .

Произведение этих чисел можно представить рекуррентной формулой вида: *q =x(x-1)*. Ряд чисел, образованных по этой формуле, имеет только четные числа в своем составе. Причем, промежутки между этими числами в данном ряду неуклонно возрастают, а количество «неиспользованных» целых чисел находится по формуле:

$$q_i - q_{i-1} - 1 = n_{i,(i-1)} \tag{16}$$

Нетрудно заметить, что эти «неиспользованные» целые числа представляют собой ***произведения иррациональных чисел***, отличающихся друг от друга на 1 (единицу) и имеющие одинаковую мантиссу:

1 = 1,6180339·0,6180339 = $X_1(X_1 - 1)$; *3 = 2.3027756·1,3027756;*

4 =2.5615528·1.5615528 и т.д.

Таким образом, можно назвать найденные иррациональные числа, в отличие от прямоугольных чисел [3] – псевдопрямоугольными числами.

Необходимо отметить, что псевдопрямоугольные числа, основанные на произведении иррациональных чисел, представляют ряд всех натуральных целых чисел, как четных так и нечетных чисел.

Литература:

1. Число π в математике и естествознании, электронный ресурс, http://bajandin.narod.ru/Psevdo.pdf
2. Формула Антифонта, электронный ресурс , http://alterapars.narod.ru/Qadra/form_A.htm
3. Прямоугольное число. Википедия https://ru.wikipedia.org/wiki/