Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с n+1 независимыми переменными

Ашырбаева Айжаркын Жоробековна, доктор физико-математических наук, профессор
Ошский технологический университет имени М.М. Адышева
Садыкова Гульхан Курманбековна, аспирант
Ошский государственный университет, (г. Ош, Кыргызская республика)

Аннотация. *Рассмотрена система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (СНДУ в ЧП) первого порядка с n+1 независимыми переменными. Методом дополнительного аргумента (МДА) доказано существование единственного решения начальной задачи.*

Ключевые слова: *система дифференциальных уравнений, нелинейное, частные производные, МДА, принцип сжатых отображений.*

Мы рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} D[a_{11}(t,x,u_1,\dots,u_n),\dots,a_{1n}(t,x,u_1,\dots,u_n)]u_1(t,x) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(t,x,u_1,\dots,u_n) + f(t) \\ D[a_{21}(t,x,u_1,u_2),a_{22},\dots,a_{2n}]u_2(t,x) = b_1(t,x,u_1,u_2) \\ D[a_{31}(t,x,u_1,u_2,u_3),\dots,a_{3n}(t,x,u_1,u_2,u_3)]u_3(t,x) = b_2(t,x,u_1,u_2,u_3) \\ ------------------------------------ \\ D[a_{n1}(t,x,u_1,\dots,u_n),\dots,a_{nn}(t,x,u_1,\dots,u_n)]u_n(t,x) = b_{n-1}(t,x,u_1,\dots,u_n) \end{cases} \tag{1}$$

где

$$(t,x) \in G_{n+1}(T) = [0,T] \times R^n,$$

и оператор

$$D[\omega_1,\dots\omega_n] = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \omega_k \frac{\partial}{\partial x_k};$$

Система (1) рассматривается с начальными условиями

$$\begin{gathered} u_1(0,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \\ u_k(0,x) = \varphi_k(x), \ \ x \in R, \ \ k = 2,\dots,n. \end{gathered} \tag{2}$$

Для решения данной задачи используем так называемый метод-метод дополнительного аргумента (МДА). Приведем задачу (1)-(2) к системе интегральных уравнений МДА. Затем по принципу сжатых отображений докажем существование и единственность решения системы интегральных уравнений.

Применениям этого метода посвяшены работы М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, А.Ж. Ашырбаевой.

Используя классы функций из [2], докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $\varphi_k(x) \in C^{(1)}(R^n), a_{ij}(t,x,u_1,\dots,u_n) \in \bar{C}^{(1)}(G_{n+1}(T) \times R^n)$,
$b_i(t,x,u_1,\dots,u_{i+1}) \in \bar{C}^{(1)}(G_{n+1}(T) \times R^n), i,j = 1,2,.,.,n.$

Тогда при $0 < T_* \le T$ задача (1)-(2) имеет решение в $\left(\bar{C}^{(1)}\big(G_{n+1}(T_*)\big)\right)^{\mathrm{n}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для доказательства теоремы воспользуемся МДА. Развитие этого метода и его применение к СНДУ в ЧП рассмотрены в работе [1,3].

Рассмотрим сначала первое уравнение системы (1). Это уравнение с условием (2) сводиться к следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} u_i(t,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \int_0^t \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\big(t,p_1(v,t,x),u_1(v,p_1),\dots,u_n(v,p_1)\big)\Big) dv + \\ + \int_0^t \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\big(t,p_1(v,t,x),u_1(v,p_1),\dots,u_n(v,p_1)\big)\Big) dv + \int_0^t f(s)ds, \end{aligned} \tag{3}$$

где

где $p_1(s,t,x) = (p_{11}(s,t,x),p_{12}(s,t,x),\dots,p_{1n}(s,t,x))$ - решение следующей системы интегральных уравнений

$$\begin{gathered} p_{1k}(s,t,x) = x_k - \int_s^t a_{1k}\left(v,p_1(v,t,x),u_1(v,p_1),\dots,u_n(v,p_1)\right)dv, \ k = 1,\dots,n, \\ (s,t,x) \in Q_2^n(T). \end{gathered} \tag{4}$$

Где обозначено

$$Q_n^n(T) = \{(t_1,t_2,t_3,.,t_n,x) \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \dots \le t_n \le T, x \in R^n\}$$

Из (3) имеем:

$$u_1(t,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \int_0^t f(s)ds \tag{5}$$

Система уравнений (4) имеет единственное решение, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial p_{1k}(s,t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(t,x,u_1,\dots,u_n)\frac{\partial p_{1k}(s,t,x)}{\partial x_i} = 0, \ p_{1k}(s,s,x) = x_k, \ k = 1,\dots,n.$$

Воспользуясь преимуществом МДА, мы нашли неизвестную функцию $u_1(t,x)$ в виде (5).

Теперь подставляя найденную функцию $u_1(t,x)$ во второе уравнение системы (1) получаем следующую задачу относительно неизвестной функции $u_2(t,x)$:

$$D[\tilde{a}_{21}(t,x,u_2),\tilde{a}_{22},\dots,\tilde{a}_{2n}]u_2(t,x) = \tilde{b}_1(t,x,u_2) \tag{6_1}$$

с условием (2),

где

$$\tilde{a}_{2i}(t,x,u_2) = a_{2i}\left(t,x,\sum_{k=1}^{n} x_k + \int_0^t f(s)ds,u_2\right),$$

$$\tilde{b}_1(t,x,u_2)=b_1\left(t,x,\sum_{k=1}^{n} x_k+\int_0^t f(s)ds,u_2\right),\ i=1,\dots,n$$

Применяя МДА для задачи (6), (3), сводим задачу к системе интегральных уравнений:

$$u_2(t,x)=\varphi\big(p_2(0,t,x)\big)+\int_0^t \tilde{b}_1\big(v,p_2(v,t,x),u_2(v,p_2(v,t,x)\big)dv, \qquad (7_1)$$

где

где $p_2(s,t,x)=(p_{21}(s,t,x),p_{22}(s,t,x),\dots,p_{2n}(s,t,x))$ - решение следующей системы интегральных уравнений

$$p_{2k}(s,t,x)=x_k-\int_s^t \tilde{a}_{2k}\big(v,p_2(v,t,x),u_2(v,p_2)\big)dv,\ k=1,\dots,n \qquad (8_1)$$

$$(s,t,x)\in Q_2^n(T)$$

Система уравнений (4) имеет единственное решение, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial p_{2k}(s,t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} a_{2i}(t,x,u_1,\dots,u_n)\frac{\partial p_{2k}(s,t,x)}{\partial x_i}=0,\ p_{2k}(s,s,x)=x_k,\ k=1,\dots n.$$

Применим принцип сжатых отображений для системы интегральных уравнений (7_1), (8_1) (см. работы [1-3]). При $0<T_1^*\le T$ (T_1^* определяется из исходных данных и из условий теоремы) задача (7_1), (3) имеет единственное решение в $\left(\bar{C}^{(1)}(G_{n+1}(T_1^*))\right)^n$.

Теперь будем решать третье уравнение системы (1) по известным функциям $u_1(t,x),u_2(t,x)$.

$$D[\tilde{a}_{31}(t,x,u_3),\tilde{a}_{32},\dots,\tilde{a}_{33}]u_3(t,x)=\tilde{b}_2(t,x,u_3) \qquad (6_2)$$

с условием (2),

где

$$\tilde{a}_{3i}(t,x,u_3)=a_{3i}\left(t,x,\sum_{k=1}^{n} x_k+\int_0^t f(s)ds,u_2,u_3\right),$$

$$\tilde{b}_2(t,x,u_3)=b_2\left(t,x,\sum_{k=1}^{n} x_k+\int_0^t f(s)ds,u_2,u_3\right),\ i=1,\dots,n.$$

Применяя МДА для задачи (6_2), (3), сводим задачу к системе интегральных уравнений:

$$u_3(t,x)=\varphi\big(p_3(0,t,x)\big)+\int_0^t \tilde{b}_2(v,p_3(v,t,x),u_3(v,p_3(v,t,x))dv, \qquad (7_2)$$

где $p_3(s,t,x)=(p_{31}(s,t,x),p_{32}(s,t,x),\dots,p_{3n}(s,t,x))$ - решение следующей системы интегральных уравнений

$$p_{3k}(s,t,x)=x_k-\int_c^t \tilde{a}_{3k}\big(v,p_3(v,t,x),u_3(v,p_3)\big)dv,\ k=1,\dots,n, \qquad (8_2)$$

$$(s,t,x)\in Q_2^n(T).$$

Система уравнений (8_2) имеет единственное решение, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial p_{3k}(s,t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{3i}(t,x,u_3)\frac{\partial p_{3k}(s,t,x)}{\partial x}=0,\ p_{2k}(s,s,x)=x_k,\ k=1,\dots,n.$$

По принципу сжатых отображений система уравнений (7_2), (8_2) при $0<T_2^*\le T$ (T_2^* определяется из исходных данных и из условий теоремы) имеет решение в $\left(\bar{C}^{(1)}(G_{n+1}(T_2^*))\right)^n$.

Продолжая этот процесс, будем решать последнее уравнение системы (1) по известным функциям $u_1(t,x),u_2(t,x),\dots,u_{n-1}(t,x)$:

$$D[\tilde{a}_{n1}(t,x,u_n),\tilde{a}_{n2},\dots,\tilde{a}_{nn}]u_n(t,x)=\tilde{b}_{n-1}(t,x,u_n) \qquad (6_n)$$

с условием (2),

где

$$\tilde{a}_{ni}(t,x,u_n)=a_{ni}\left(t,x,\sum_{k=1}^{n} x_k+\int_0^t f(s)ds,u_2,u_3,\dots,u_n\right),$$

$$\tilde{b}_{n-1}(t,x,u_n)=b_{n-1}\left(t,x,\sum_{k=1}^{n} x_k+\int_0^t f(s)ds,u_2,u_3,\dots,u_n\right),\ i=1,\dots,n.$$

Применяя МДА для задачи (6_n), (3), сводим задачу к системе интегральных уравнений:

$$u_n(t,x)=\varphi\big(p_n(0,t,x)\big)+\int_0^t \tilde{b}_{n-1}\big(v,p_n(v,t,x),u_n(v,p_n(v,t,x)\big)dv, \qquad (7_n)$$

где $p_n(s,t,x)=(p_{n1}(s,t,x),p_{n2}(s,t,x),\dots,p_{nn}(s,t,x))$ – решение следующей системы интегральных уравнений

$$p_{nk}(s,t,x)=x_k-\int_s^t \tilde{a}_{nk}\big(v,p_n(v,t,x),u_n(v,p_n)\big)dv,\ k=1,\dots,n, \qquad (8_n)$$

$$(s,t,x)\in Q_2^n(T).$$

Система уравнений (8_n) имеет единственное решение, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial p_{nk}(s,t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_{ni}(t,x,u_3)\frac{\partial p_{nk}(s,t,x)}{\partial x_i}=0,\ p_{nk}(s,s,x)=x_k,\ k=1,\dots,n.$$

По принципу сжатых отображений система уравнений (7_n), (8_n) при $0<T_{n-1}^*\le T$ (T_{n-1}^* определяется из исходных данных и из условий теоремы) имеет решение в $\left(\bar{C}^{(1)}(G_{n+1}(T_{n-1}^*))\right)^n$.

Следовательно, при $0<T_*\le T$, где $T_*=\min\{T_1^*,T_2^*,\dots,T_{n-1}^*\}$ задача (1)-(2) имеет решение в $\left(\bar{C}^{(1)}(G_{n+1}(T_*))\right)^n$.Теорема доказана.

Литература:

1. Иманалиев М.И. , Алексеенко С.Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С.1111–1115.

2. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.

3. Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными// Международный научно-исследовательский журнал. 2018. – № 3(69). – С. 6-10.