ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Новый способ построения решений уравнений в частных производных четвертого порядка гиперболического типа

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, доктор физико-математических наук, доцент
Мамазиаева Эльмира Амановна кандидат физико-математических наук
Ошский технологический университет им. М.М. Адышева, Кыргызская республика

В данной работе метод дополнительного аргумента распространен для уравнений четвертого порядка с коэффициентами, зависящими от пространственной переменной вида: $D^2[-a(t,x)]D^2[a(t,x)]u(t,x)=f(t,x)$, $(t,x)\in G_2(T)=[0,T]\times R$, (1)

где дифференциальный оператор: $D[\omega]=\dfrac{\partial}{\partial t}+\omega\dfrac{\partial}{\partial x}$,

$a(t,x)\in\overline{C}^{(4)}(G_2(T)),\quad f(t,x)\in\overline{C}^{(4)}(G_2(T))$ -заданные функции,

$C^{(k)}(\Omega)$- пространства функций, определенных и непрерывных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k) на Ω ,

$\overline{C},\overline{C}^{(\kappa)}$ - пространства функций с дополнительным условием ограниченности (соответственно и для указанных производных);

Рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями

$u(0,x)=\psi_0(x)$, (2)

$\dfrac{\partial^k u(0,x)}{\partial t^k}=\lambda_k(x),\quad k=1,2,3,$ (3)

где

$\psi_0(x),\quad \lambda_k(x)\in\overline{C}^{(4)}(R),\quad (k=1,2,3).$

Используя начальные данные, введем обозначения:

$$D[-a(t,x)]D^2[a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

$$D^2[a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_0(x),$$

$$D[a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=\psi_1(x),$$

Обозначим через $p(s,t,x),\quad q(s,t,x)-$ соответствующие решения ин-тегральных уравнений:

$$p(s,t,x)=x+\int_s^t a(\nu,p(\nu,t,x))d\nu, \qquad (4)$$

$$q(s,t,x)=x-\int_s^t a(\nu,q(\nu,t,x))d\nu, \qquad (5)$$

$(s,t,x)\in Q_2(T)$,

$Q_n(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_n,x)\big|\ 0\le t_1\le t_2\le t_3\le...\le t_n\le T,\ x\in R\}.$

Следует отметить, что интегральные уравнения (4), (5) с $a(t,x)\in\overline{C}^{(1)}(G_2(T))$ имеют единственные решения с условием соответственно $p(s,s,x)=x,\quad q(s,s,x)=x.$

Из (4) и (5) вытекают соответственно соотношения

$D[-a(t,x)]p(s,t,x)=0$, (6)

$D[a(t,x)]q(s,t,x)=0$, (7)

Лемма. Задача (1), (2), (3) имеет единственное решение вида:

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{1}\psi_k(q(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+\int_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,s,q(s,t,x))\frac{s^k}{k!}ds+\int_0^t(t-s)\times$$
$$\times\int_0^s(s-\tau)f\big(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x)\big)d\tau ds. \qquad (8)$$

Доказательство.

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Обозначая через $z(t,x;u)=D^2[a(t,x)]u(t,x), \quad b(t,x)=-a(t,x),$
запишем уравнение (1) в виде:
$D^2[b(t,x)]z(t,x;u)=f(t,x)$. (9)
Введем функцию
$z_1(t,x;u)=D[b(t,x)]z(t,x;u),$
Тогда уравнение (1) принимает вид:
$D[b(t,x)]z_1(t,x;u)=f(t,x).$ (10)

Уравнение (10) с условиями (2), (3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z_1(t,x;u)=\varphi_1(p(0,t,x))+\int_0^t f(s,p(s,t,x))ds. \qquad (11)$$

В самом деле, дифференцируя (11), получаем (10).

$$D[b(t,x)]z_1(t,x;u)=\varphi_1'(p(0,t,x))D[b(t,x)]p(0,t,x)+$$
$$+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}D[b(t,x)]p(s,t,x))ds+f(t,x).$$

Из последнего равенства в силу (6) получаем (10). Полагая $t=0$ в (11), получаем $z_1(0,x;u)=\varphi_1(x).$
Если функция $z\ (t,x;u)$ –решение уравнения

$$z(t,x;u)=\varphi_0(p(0,t,x))+\varphi_1(p(0,t,x))t+\int_0^t (t-s)f(s,p(s,t,x))ds, \quad (12)$$

то она является решением задачи (11), (2), (3).
В самом деле, из (12) следует

$$D[b(t,x)]z(t,x;u)=[\varphi_0'(p(0,t,x))+\varphi_1'(p(0,t,x))t]D[b(t,x)]p(0,t,x)+$$
$$+\int_0^t (t-s)\frac{\partial f}{\partial x}D[b(t,x)p(s,t,x))ds+z_1(t,x;u).$$

Следовательно, в силу (6) получаем справедливость (11).

Таким образом, введя функции $z(t,x;u), \ z_1(t,x;u)$, из (1) вывели (12).

Обратно применяя 2 раза оператор $D[b(t,x)]$ для уравнения (12), получаем справедливость (1), (2), (3).
Далее, введем еще следующее обозначение
$\theta(t,x;u)=D[a(t,x)]u(t,x),$

Тогда уравнение (12) принимает вид:

$$D[a(t,x)]\theta(t,x;u)=\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+\int_0^t (t-\tau)\ f(\tau,p(\tau,t,x))d\tau. \quad (13)$$

Задача (13), (2,) (3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегрального уравнения

$$\theta(t,x;u)=\psi_1(q(0,t,x))+\int_0^t\sum_{k=0}^{1}\ \varphi_k(p(0,s.q(s,t,x))\frac{s^k}{k!}ds+\int_0^t\ \int_0^s (s-\tau)\times \qquad (14)$$
$$\times f(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x))d\tau ds.$$

В самом деле, дифференцируя (14), получаем

$$D[a(t,x)]\theta(t,x;u)=\psi_1'(q)D[a(t.x)]q(0,t,x)+\int_0^t\sum_{k=0}^{1}\varphi_k'(p(0,s,q))\frac{\partial p}{\partial x}\times$$
$$\times D[a(t,x)]q(s,t,x)\frac{s^k}{k!}ds+\int_0^t\int_0^s (s-\tau)\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}\times$$
$$\times D[a(t,x)]q(s,t,x)d\tau ds+\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+\int_0^t (t-\tau)f(\tau,p(\tau,t,x))d\tau.$$

В силу (7) доказано выполнение (13). Полагая $t=0$ в (14), получаем $\theta(0,x;u)=\psi_1(x).$

Для задачи (14),(2),(3) еще раз применяя метода дополнительного аргумента,получаем (8).
Покажем, что уравнение (8) удовлетворяет интегральному уравнению (14) и начальным условиям (2), (3).
Из (13) имеем:

$$D[a(t,x)]u(t,x)=\sum_{k=0}^{1}\psi_k'(q(0,t,x))\frac{t^k}{k!}D[a(t,x)]q(0,t,x)+$$

$$+\int_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\varphi_k'(p(0,s.q(s,t,x)))\frac{s^k}{k!}\frac{\partial p}{\partial x}D[a(t,x)]q(s,t,x)ds+$$

$$+\int_0^t(t-s)\int_0^s(s-\tau)\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}D[a(t,x)]q(s,t,x)d\tau ds+\theta_1(t,x;u).$$

Следовательно, в силу (7) доказано выполнение (14).

В (8) при $t=0,\quad u(0,x)=\psi_0(x).$

Таким образом, введя функцию $\theta(t,x;u)$, из (12) вывели (8).

Обратно, последовательно применяя для уравнения (8) сначала 2 раза оператор $D[a]$, затем 2 раза оператор $D[-a]$, получаем справедливость (1), (2), (3).

Таким образом, по схеме применения метода дополнительного аргу-мента, приведенной в работах [1,2], за-дача (1), (2), (3) имеет единственное решение вида (8).

Рассмотрим пример. Пусть в уравнении (1) $a(t,x)=1,$ т.е.

$$u_{tttt}(t,x)-2u_{ttxx}(t,x)+u_{xxxx}(t,x)=f(t,x,). \quad (15)$$

Рассмотрим уравнение (15) с начальными условиями

$$u(0,x)=x^2,$$

$$u_t(0,x)=0,$$

$$u_{tt}(0,x)=x,$$

$$u_{ttt}(0,x)=0.$$

Запишем уравнение (15) в операторном виде:

$$D^2[-1]D^2[1]u(t,x)=f(t,x),$$

$$D[-1]D^2[1]u(t,x)\big|_{t=0}=[u_{ttt}+u_{ttx}-u_{txx}-u_{xxx}]\big|_{t=0}=1=\varphi_1(x),$$

$$D^2[1]u(t,x)\big|_{t=0}=[u_{tt}+2u_{tx}+u_{xx}]\big|_{t=0}=x+2=\varphi_0(x),$$

$$D[1]u(t,x)\big|_{t=0}=[u_t+u_x]\big|_{t=0}=2x=\psi_1(x),$$

$$u(0,x)=x^2=\psi_0(x).$$

Решение (8) для уравнения (15) с заданными начальными условиями принимает вид:

$$u(t,x)=x^2+x\frac{t^2}{2}+\int_0^t(t-\nu)\int_0^\nu(\nu-\rho)f(\rho,x-t+2\nu-\rho,u(\rho,x-t+2\nu-\rho))\times$$

$$\times d\rho]d\nu,$$

Литература:

1.Аширбаева А.Ж. Метод дополнительного аргумента для дифференци-альных уравнений гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, М.И. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравне-ниям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 37. – С.13–17.

2.Аширбаева А.Ж. Сведение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвер-того порядка к решению интег-рального уравнения [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Механика и моделиро-вание процес-сов технологии. – Тараз: Тараз университеті, 2013. - № 1. - С.14-19.