www.esa-conference.ru

Модели с нечетким состоянием среды

Андрусенко Елена Владимировна, аспирант
Колбин Вячеслав Викторович, доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург)

Ключевые слова: *теория принятия решений, нечеткая среда, нечеткие множества, функция принадлежности*

Введение

Информационная ситуация I_1 характеризует случай, когда орган управления располагает «нечетким» знанием состояний среды *S*. При этом предполагается, что орган управления *M* точно знает полное множество Θ возможных состояний θ_j среды, множество Φ своих решений φ_k и значения оценочного функционала $F = \{f_{jk}\}_{j,k=1}^{n,m}$ [1]. На основе понятия теории нечетких множеств сформулируем пять моделей «поведения» среды *E*, применение которых дает возможность сформулировать ситуацию принятия решений в виде $\{\Phi, \mathrm{A}_\theta, F\}$, где A_θ — нечеткое множество или нечеткое случайное событие, определяемое функцией принадлежности μ_A и распределением p вероятностей состояния среды *S*.

Рассмотрим основные способы нечеткого задания состояний среды *S* на основе определения и свойств нечетких множеств.

Определение и операции с нечеткими множествами. Нечеткое множество *A* на элементах *X* определяется заданием отображения $\mu_A(x)$ элементов $x \in X$ в интервал [0,1]. При этом $\mu_A(x)$ называется функцией принадлежности элементах нечеткому множеству *A*, характеризующей степень истинности события $\{x \in X\}$, а множество *A* записывается виде

$$A = \{x, \mu_A(x)\}_{x \in X}$$

Приведем основные операции с нечеткими множествами.

1. Эквивалентность $\mathrm{A} \sim \mathrm{B} \leftrightarrow \mu_A(x) \equiv \mu_B(x)$.
2. Включение $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$).
3. Дополнение $\mathrm{A} \sim \mathrm{B} \leftrightarrow \mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$.
4. Объединение $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \leftrightarrow \mu_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.
5. Пересечение $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \leftrightarrow \mu_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.
6. Произведение $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \leftrightarrow \mu_{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.
7. Сумма $\mathrm{A} + \mathrm{B} \leftrightarrow \mu_{\mathrm{A}+\mathrm{B}}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.
8. Умножение *A* на $\alpha \in [0; 1]: \alpha \leftrightarrow \mu_{\alpha A}(x) = \alpha\mu_A(x)$.
9. Возведение *A* в степень $\alpha > 0: A^\alpha \leftrightarrow \mu_{A^\alpha}(x) = (\mu_A(x))^\alpha$.
10. Концентрирование $\mathrm{CON}(A) = A^2$.
11. Растяжение $\mathrm{DIL}(A) = A^{0,5}$.

Нечеткое множество *A* называется субнормальным (нормальным), если

$$\max_{x \in X} \mu_A(x) < 1 \ (\max_{x \in X} \mu_A(x) = 1$$

Множество уровня $A(\alpha)$ нечеткого множества *A* есть четкое множество вида $A(\alpha) = \{x \in X: \mu_A \leq \alpha\}$, при этом $A(\alpha)$ монотонно по $\alpha \in [0; 1]$, т.е. $\alpha_1 \geq \alpha_1 \rightarrow A(\alpha_1) \subset A(\alpha_2)$. Нечеткое множетсво *A* определяется своими множествами уровня $A(\alpha)$ в виде

$$A = \sum_\alpha \alpha A(\ \alpha)$$

где $\sum_\alpha$ понимается в смысле операции суммы нечетких множеств; а $\alpha A(\alpha)$ —субнормальное четкое множество, для которого $\mu_{\alpha A(\alpha)}(x) = \alpha \mu_{A(\alpha)}(x), \forall x \in X$.

Вероятностные меры нечетких событий. Пусть $\{R^n, \sigma, P\}$ — вероятностное пространство, в котором *R* — пространство n-мерных вещественных векторов; σ — поле борелевских множеств в R^n (σ - алгебра); P — вероятностная мера на R^n.

Нечеткое случайное событие *A* в R^n есть нечеткое множество, функция принадлежности которого $\mu_A(x) \in \{R^n \rightarrow [0; 1]\}$ измерима по Борелю при $x \in X$. Вероятность нечеткого случайного события *A* равна математическому ожиданию функции принадлежности μ_A и определяется при помощи интеграла Лебега - Стилтьеса в виде

$$P[A] = \int_{R^n} \mu_A(x) dP(x) = M[\mu_A]$$

Основные операции, приведенные выше, могут быть применены и к нечетким случайным событиям.

Нечеткие отношения порядков. Пусть *X* и *Y* — два множества элементов *x* и *y* произвольной природы. Нечеткое бинарное отношение *W* определяется как нечеткое множество $W = \{((x, y), \mu_s(x, y))\}$, где $(x, y) \in X \times Y$. Аналогично определяется n -арное отношение $W = \{((x_1, .., x_n), \mu_s(x_1, .., x_n))\}$, где $(x_1, .., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$. Величина $\mu_s(x, y)$ рассматривается как «сила» (степень) отношения *W* между *x* и *y*.

Поскольку нечеткое отношение определяется как нечеткое множество, то могут быть определены операции над нечеткими отношениями, аналогичные соответствующим операциям над нечеткими множествами, которые приведены в [8].

Нечеткие множества состояний среды.

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Введенные понятия нечетких множеств и отношений позволяют сформулировать различные модели нечеткого задания «поведения» среды E применительно к формальным схемам определения ситуаций принятия решений $\{\Phi, \Theta, F\}$, рассматриваемых в этой части.

Модель 1. Рассматривается нечеткое множество $A_\Theta = \{(\theta_j, \mu_j)\}_{\theta_j \in \Theta}$, порождаемое заданием полного множества $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ возможных состояний среды S, причем функция принадлежности μ на Θ определяется в виде $\mu(\Theta) = \mu_j$ при $\theta = \theta_j$ $(j = 1, \dots, n)$.

В качестве интерпретации такого нечеткого множества A_Θ можно предполагать, что орган управления M выделяет полное множество Θ всех возможных состояний среды S, а затем при помощи нечеткого отношения принадлежности, задаваемого функцией $\mu(\Theta)$, определяет нечеткое множество A_Θ

Модель 2. Рассматривается нечеткое полное случайное событие $A_\Theta\{(\theta, \mu_A(\theta)): P(\theta = \theta_j) = p_j (j = 1, \dots, n)\}$, порождаемое заданием полного множества $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ возможных состояний среды S и распределения $p = (p_1, \dots, p_n)$, причем под $\mu_A(\theta)$ понимается степень принадлежности элемента $\theta \in \Theta$ к A_Θ.

В качестве интерпретации такого нечеткого полного случайного события A_Θ в ситуации принятия решений $\{\Phi, \mathrm{A}_\theta, F\}$ можно считать, что сначала орган управления $У$ выделяет полное множество Θ состояний среды S, затем считает состояния среды случайно распределенными с вектором $p = (p_1, \dots, p_n)$, а затем четкое множество Θ заменяется нечетким множеством $\{(\theta\mu^0(\theta))\}_{\theta \in \Theta}$ на основе рассмотрения функции принадлежности $\mu^0(\theta)$, и наконец, орган управления $У$ в качестве модели «поведения» среды E рассматривает нечеткое полное случайное событие A_Θ при $\mu_A(\theta) = \mu^0(\theta)$. Приведем выражения для трех основных вероятностных характеристик нечеткого полного случайного события:

$$P(A_\Theta) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j p_j\,, M(A_\Theta) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \theta_j \mu_j p_j}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j p_j}, \sigma^2(A_\Theta) = \frac{\sum_{j=1}^{n} [\theta_j - M[A_\Theta]]^2 \mu_j p_j}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j p_j}$$

Модель 3. Рассматривается нечеткое случайное событие $A_\Theta = \{(\Theta_i, \mu_i), P(\theta = \theta_i) = \overline{p}_i (i = 1, \dots, \overline{n})\}$, порождаемое заданием подмножеств Θ_i полного множества Θ возможных состояний среды S и распределения $\overline{p} = (\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_{\overline{n}})$ на этих подмножествах, причем под μ_i понимается степень принадлежности θ к Θ_i. В качестве интерпретации такого нечеткого случайного события A_Θ в ситуации принятия решений $\{\Phi, \mathrm{A}_\theta, F\}$ можно считать, что сначала орган управления M выделяет полное множество Θ состояний среды S, затем производит разбиение Θ на подмножества Θ_i затем предполагает, что состояния среды распределены случайно с вероятностями $\overline{p}_i$ попадания θ в Θ_i. И наконец, орган управления M заменяет четкое множество Θ либо объединением $\cup\, \Theta_i$ четких множеств Θ_i нечетким множеством $\{(\theta_i, \mu_i)\}_{i=1}^{n}$, причем в качестве модели «поведения» среды E рассматривает нечеткое случайное событие A_Θ.

Приведем следующие основные вероятностные характеристики нечеткого случайного события A_Θ:

$$P(A_\Theta) = \sum_{j=1}^{\overline{n}} \mu_j \overline{p}_j\,, M(A_\Theta) = \frac{\sum_{j=1}^{\overline{n}} \mu_i \sum_{\theta_j \in \Theta_i} \theta_j p_j}{\sum_{i=1}^{\overline{n}} \mu_{ij} \overline{p}_j}, \sigma^2(A_\Theta) = \frac{\sum_{i=1}^{\overline{n}} [\sum_{\theta_j \in \Theta_i} \theta_j - M[A_\Theta]]^2 \mu_j \overline{p}_j}{\sum_{j=1}^{\overline{n}} \mu_j \overline{p}_j}$$

где $p = (p_1, \dots, p_n)$ – распределение вероятностей состояний среды C на Θ, а $\overline{p}_i = \sum_{\theta_j \in \Theta_i} p_i$.

Модель 4. Рассматривается нечеткое множество $A_\Theta = \{(\theta_i, \theta_j), \mu_{S_A}(\theta_i, \theta_j)\}_{i,j=1}^{n}$ порождаемое заданием полного множества $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ возможных состояний среды S и нечетким бинарным отношением S_A на $\Theta \times \Theta$, определяемым функцией принадлежности $\mu_{S_A}(\theta_i, \theta_j)$. В качестве нечеткого бинарного отношения могут быть использованы нечеткие частичные порядки, нечеткий порядок, нечеткий линейный порядок и другие нечеткие отношения. В качестве интерпретации нечеткого множества A_Θ, приведенного в этой модели, рассмотрим следующий пример. Пусть Θ – множество вещественных чисел $\theta_1, \dots, \theta_n$, бинарное отношение S_A представляет собой отношение порядка $\geq$ на вещественной оси (R^1). Тогда получим, что орган управления M сперва установил состав множества Θ, выбрал отношение S_A, определил функцию $\mu_{S_A}(\theta_i, \theta_j)$ как степень истинности выполнения отношения S_A между элементами $\theta_i, \theta_j \in \Theta: \theta_i \geq \theta_j$. В результате этого в качестве модели поведения среды E орган управления M принимает нечеткое множество A_Θ.

Модель 5. Рассматривается нечеткое случайное событие $A_\Theta = \{(\theta_i, \theta_j), \mu_{S_A}(\theta_i, \theta_j): P(\theta = \theta_j) = p_j (j = 1, \dots, n)\}$, порождаемое заданием полного множества е возможных состояния среды C, распределением $p = (p_1, \dots, p_n)$ на Θ и нечетким отношением S_A с функцией принадлежности μ_{S_A}.

Интерпретация этой модели может быть дана аналогично интерпретации модели 2 с учетом интерпретации модели 4.

В работе приведена формулировка простейших моделей нечеткого «поведения» среды E в ситуации принятия решений $\{\Phi, \mathrm{A}_\theta, F\}$ на основе использования определений теории нечетких множеств.

Литература:

1. Колбин В.В., Методы принятия решений. СПб.: Лань, 2015. – 649 с.