www.esa-conference.ru

К вопросу об особых решениях дифференциальных уравнений

Андреева Ирина Алексеевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Ефимова Татьяна Олеговна, старший преподаватель
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Ключевые слова: *Обыкновенные дифференциальные уравнения, детерминированные процессы, существование и единственность решений, обыкновенные решения, особые решения, точки бифуркации, огибающие, траектории.*

Крылатые слова о том, что законы Природы написаны на языке дифференциальных уравнений, принадлежат Сэру Исааку Ньютону. Это утверждение касается и классической теории нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 4, 5], базирующейся на теоремах Коши существования и единственности решений и описывающей детерминированные процессы, протекающие как в природе, так и в техногенных системах, равно как и в биологических и экономических, а также в социальных системах[1, 4, 8]. Под детерминированными мы понимаем процессы, для которых состояние описываемой системы в произвольный фиксированный момент зависит от ее состояния в любой другой момент времени [6, 7]. Решения систем, описывающие подобные процессы, носят название обыкновенных решений. Но при несоблюдении условий теоремы Коши ситуация полностью меняется. Точка, в любой окрестности которой таковые условия не выполнены, может оказаться для изучаемой системы точкой неединственности, так называемой точкой бифуркации. Решение системы, каждая точка которого является точкой неединственности, называется особым решением. Задача полного исследования системы предполагает нахождение всех ее решений, как обыкновенных, так и особых. Но в специальной литературе этот вопрос освещен недостаточно полно. Данная статья открывает цикл статей, посвященных вышеописанной тематике.

Предварительные замечания

Мы рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной

$$F\,(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

где F и $F'_{y'} \in C(D), D\ (\subset \mathbb{R}^3)$ есть область, а $F'_{y'}(x, y, y') \not\equiv 0$ во всякой области $U \subset D$, (в противном случае в такой области U функция F окажется не зависящей от y', и тогда уравнение (1) перестанет быть дифференциальным в U).

Решением уравнения (1) назовем всякую функцию класса C^1

$$\varphi : I = \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R},$$

(где I может быть открытым, полуоткрытым или невырожденным интервалом оси x), которая при подстановке ее в уравнение (1) вместо y превращает уравнение (1) в тождество относительно x: $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, x \in I$.

График любого решения носит название интегральной кривой данного уравнения.

Область определения уравнения (1) суть множество G плоскости (x, y), такое что для любой точки $p_0 = (x_0, y_0) \in G$ уравнение

$$F\,(x_0, y_0, y') = 0 \quad (2)$$

имеет по крайней мере одно решение $y' = y'_0, q_0 = (x_0, y_0, y'_0) \in D$.

Геометрически это означает, что уравнение (1) задает в любой точке $p_0 \in G$ по крайней мере одно касательное направление y'_0 для его интегральных кривых. Для уравнения (1) решения уравнения (2) называются допустимыми значениями y' в точке p_0.

Задача Коши для уравнения (1) формулируется следующим образом: мы задаем точку $p_0 = (x_0, y_0) \in G$ и допустимое для нее значение $y' = y'_0$; требуется найти решение φ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0. \quad (3)$$

Точка $q_0 = (x_0, y_0, y'_0)$ называется при этом начальной точкой решения φ и соответствующей этому решению интегральной кривой $y = \varphi(x)$.

Условия (3) при этом называются начальными условиями (или начальными данными) решения φ. Решение задачи Коши называется единственным, если для любых двух ее решений $\varphi_1(x),\ x \in I_1, \varphi_2(x),\ x \in I_2,\ \exists\, \partial > 0 : \varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x)$ для $x \in I_1 \cap I_2 \cap (x_0 - \partial, x_0 + \partial)$. В противном случае решение носит название неединственного.

Решение уравнения (1) $y = \varphi(x), x \in I$, называется обыкновенным (особым), если для любой его точки $q_0 = (x_0, y_0, y'_0) = \big(x_0, \varphi(x_0), \varphi'(x_0)\big)$ решение задачи Коши (1), (3) единственно (неединственно).

Интегральная кривая уравнения (1) носит название обыкновенной (особой), если представляет собой график обыкновенного (особого) решения.

Точка $p_0 = (x_0, y_0) \in G$ называется точкой единственности для уравнения (1), если для любого ее допустимого значения $y' = y'_0$ решение задачи Коши (1), (3) единственно или не существует. В противном случае она будет называться точкой неединственности.

Соотношение

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (4)$$

где C имеет смысл произвольной постоянной, называется общим интегралом уравнения (1) на множестве $G'\ (\subset G)$, если для любой точки $p_0 = (x_0, y_0) \in G'$ и любого допустимого для нее значения $y' = y'_0$ оно однозначно определяет единственное решение задачи Коши.

Используя общий интеграл (4) уравнения (1), мы иногда в состоянии найти особые интегральные кривые, лежащие в G', как огибающие семейства кривых, определяемых этим интегралом.

Достаточный признак огибающей

Имеет место следующая теорема [2, 9].

Теорема 1.

Пусть $\Phi(x, y, C) = 0, \Phi \in C^2(D), (D \in \mathbb{R}^3 -$ область), (5)

есть семейство кривых, зависящее от параметра $C \in I = (a, b)$ и заполняющее множество *G* плоскости *(x, y)*, *G x I* $\subset$ *D*.

Пусть, далее, $\Phi'_y(x, y, C) \neq 0$ в *G x I*.

Если система уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0,\ \Phi'_C(x, y, C) = 0, (x, y, C) \in GxI, (6)$$

имеет решение класса C^1

$$y = \psi(x), C = C(x), x \in J, (7)$$

и $C'(x) \not\equiv 0$ на любом интервале $J' \subset J$, то кривая $y = \psi(x), x \in J$, является огибающей семейства кривых (5), в каждой своей точке $(x_0, \psi(x_0))$ касательной к кривой этого семейства $\Phi(x, y, C(x_0)) = 0$.

Следствие 1.

Пусть $\Phi(x, y, C) = 0$, где $C \in I = (a, b)$ есть произвольная постоянная, является общим интегралом уравнения (1) на множестве *G*.

Если для семейства кривых (4) выполнены условия Теоремы 1 и, следовательно, это семейство кривых имеет огибающую $y = \psi(x), x \in J$, то такая огибающая является особым интегралом уравнения (1).

Доказательство.

Огибающая семейства интегральных кривых уравнения (1) сама всегда является интегральной кривой для (1). В то же время каждая ее точка суть точка неединственности, поэтому она всегда оказывается особой интегральной кривой уравнения (1) [2, 3, 9].

Следующими этапами рассмотрения темы особых решений будет анализ алгебраического и общего неалгебраического случаев, что предусматривает параметрическое интегрирование уравнений [2, 3]. Предполагается сформулировать и доказать признаки существования особых решений.

Литература:

1. Андреева И.А., Андреев А.Ф. О поведении траекторий одного класса кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. Т. 1, № 3 (25). С. 1-2.
2. Andreev, A.F., Andreeva, I.A. On the question of parametric integration of differential equations. // Vestnik St. Petersburg University: Ser.1. Mathematics, Mechanics, Astronomy. 2002. Vol. 35. № 4. Pp. 1- 6.
3. Андреева И.А. Высшая математика. Особые решения дифференциальных уравнений первого порядка. // СПб, - Издательство СПбГПУ. 2003. 48 с.
4. Andreev, A.F., Andreeva, I.A. Investigation of a Family of Cubic Dynamic Systems. Vibroengineering Procedia 2017. Vol. 15. Pp. 88 – 93. DOI: 10.21595/vp.2017.19389.
5. Андреев А.Ф., Андреева И.А., Детченя Л.В., Маковецкая Т.В., Садовский А.П. Нильпотентные центры кубических систем. //Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 8. С. 1003 – 1008.
6. Андреева И.А., Андреев А.Ф. К вопросу о картине траекторий еще одного семейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 9 (31). С. 1-2.
7. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Поведение траекторий нового семейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 6 (28). С. 1-2.
8. Андреева И.А., Андреев А.Ф. О методике и результатах построения фазовых портретов нового подсемейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 5 (27). С. 5-6.
9. Залгаллер В.А. Теория огибающих. // М.,- Наука. 1975.