ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Заметки об особых точках специального семейства дифференциальных динамических систем

Андреева Ирина Алексеевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Ефимова Татьяна Олеговна, старший преподаватель
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Ключевые слова: *Динамические системы, фазовые портреты, фазовые потоки, сфера Пуанкаре, круг Пуанкаре, особые точки, сепаратрисы, траектории.*

Abstract. *The work is devoted to the results of a fundamental study on the arithmetical plane of a broad special family of differential dynamic systems having polynomial right parts. Let those polynomials be a cubic and a square reciprocal ones. A task of a whole investigation was to find out all topologically different phase portraits in a Poincare circle and indicate close to coefficient criteria of them. To achieve this goal a Poincare method of the central and the orthogonal consecutive displays (or mappings) has been used. As a result, more than 250 topologically different phase portraits in a total have been constructed. Every portrait we depict with a special table called a descriptive phase portrait. Each line of such a special table corresponds to one invariant cell of the phase portrait and describes its boundary, a source of its phase flow and a sink of it.*

All singularities of dynamic systems under consideration were fully investigated.

Keywords: *Dynamic systems, phase portraits, phase flows, Poincare sphere, Poincare circle, singular points, separatrices, trajectories.*

DOI: 10.5281/zenodo.4749556

Рассмотрение динамических систем полезно ввиду их роли как математических моделей тех процессов и явлений, при рассмотрении которых можно не учитывать так называемые статистические факторы или флуктуации. Характеризуется динамическая система своим начальным состоянием и законом ее перехода в состояние, отличающееся от исходного. *Фазовым пространством* динамической системы мы называем совокупность всех ее возможных состояний. В этой связи возникает естественное разбиение множества всех динамических систем на подмножества систем с дискретным временем и систем с непрерывным временем. Первые именуются *каскадами*, и их поведение описывается последовательностью состояний такой системы. Для вторых же – *потоков*, т.е. систем с непрерывным временем, состояние системы определено в произвольно выбранный момент времени на вещественной или мнимой оси. Каскады и потоки представляют собой предмет изучения топологической динамики. Важнейшими понятиями теории динамических систем являются: понятие устойчивости положений равновесия системы (подразумевается способность системы оставаться вблизи положения равновесия или на заданном многообразии в продолжение существенно длительного промежутка времени при достаточно малых изменениях начальных условий, а также понятие грубости системы, т.е. ее способности сохранять свои свойства при малых изменениях самой модели). Грубая динамическая система суть система, сохраняющая качественный характер своих движений при достаточно малых изменениях параметров этой системы.

Но для описания обоих указанных множеств (или типов) динамических систем применяются автономные системы дифференциальных уравнений, определенные в некоторой области и удовлетворяющие в ней условиям теоремы Коши существования и единственности их решений. При таком подходе оказывается, что положения равновесия изучаемой динамической системы отвечают особым точкам системы дифференциальных уравнений, в то время как замкнутые фазовые кривые динамических систем соотносятся с периодическими решениями системы дифференциальных уравнений и описываются ими [1, 5, 13].

В силу сказанного выше, наиболее актуальным вопросом в теории динамических систем становится изучение кривых, задаваемых дифференциальными уравнениями и их системами. Процесс такого изучения включает расщепление фазового пространства системы на траектории и выявление их характеристик, в первую очередь их предельного поведения. При этом требуется определить и классифицировать позиции равновесия системы, а также описать и изучить ее источники и стоки.

Один из последних великих энциклопедистов науки и основоположник качественной теории дифференциальных уравнений Жюль Анри Пуанкаре доказал, что любая нормальная автономная дифференциальная система второго порядка, обладающая полиномиальными правыми частями, позволяет провести ее полное качественное исследование на расширенной вещественной плоскости фазовых переменных системы $\bar{R}^2_{x,y}$ [5, 7 - 9]. Дальнейшие работы в этой области коснулись, к примеру, квадратичных динамических систем [2]; систем, включающих ненулевые линейные члены; однородных кубических систем; систем с полиномами нечетных степеней (3, 5, 7) [1, 4, 6]; систем, имеющих особые точки типов центр или фокус в начале координат O (0,0) [1, 10, 12], и ряда других разновидностей систем.

EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
www.esa-conference.ru

Мы рассматриваем семейство динамических систем на вещественной плоскости фазовых переменных x, y. Правые части систем семейства являются полиномами, кубическим в одном из уравнений и квадратичным – в другом, которые не имеют общих множителей в их разложениях на формы нижайших степеней (т.е. являются взаимно простыми полиномами), для которых выполнены условия: X (0, 1) > 0, Y (0, 1) > 0:

$$\dot{x} = p_0 x^3 + p_1 x^2 y + p_2 x y^2 + p_3 y^3 \equiv X(x,y),$$
$$\dot{y} = ax^2 + bxy + cy^2 \equiv Y(x,y).$$

Разложения форм X (x, y), Y (x, y) на вещественные формы нижайших степеней могут содержать различное число отличающихся друг от друга сомножителей. В соответствии с этим системы можно распределить по различным подсемействам, которые в дальнейшем, сообразно с результатами исследования поведения их траекторий в круге Пуанкаре, куда мы переходим за счет применения последовательных (центрального и ортогонального) отображений Пуанкаре, в свою очередь разбиваются на подсемейства очередных уровней иерархии подсемейств. Главной задачей нашего исследования становится установление и построение всех топологически различных фазовых портретов систем, относящихся к многообразным подсемействам, в круге Пуанкаре, и выявление критериев их реализации. Итогом исследования оказывается построение более чем 250 типов таких портретов. Портреты представлены как в описательной (табличной) форме, так и в графической. Полученные критерии их реализации близки к коэффициентным. Целый ряд новых методов исследования, специально разработанных для целей данной работы, может иметь самостоятельную ценность в дальнейшем развитии качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений [6 – 11, 12, 13].

Литература:

. Андреев А.Ф., Андреева И.А., Детченя Л.В., Маковецкая Т.В., Садовский А.П. Нильпотентные центры кубических систем. //Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 8. С. 1003 – 1008.

2. Андреева И.А., Андреев А.Ф. К вопросу о картине траекторий еще одного семейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 9 (31). С. 1-2.

3. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Поведение траекторий нового семейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 6 (28). С. 1-2.

4. Андреева И.А., Андреев А.Ф. О методике и результатах построения фазовых портретов нового подсемейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 5 (27). С. 5-6.

5. Андреев А.Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. СПб, Издательство С.-Петербургского университета, 2003. – 160 с.

6. Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре.I.//Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный журнал].2007. № 4. С. 17-26. Http//www.math.spbu.ru/user/diffjournal.

7. Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. II. / /Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный журнал]. 2008. № 1. С. 1-13. Http//www.math.spbu.ru/user/diffjournal.

8. Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре.III. / /Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный журнал]. 2008. № 3. С. 39-54. Http//www.math.spbu.ru/user/diffjournal.

9. Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре.IV_1. / /Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный журнал]. 2009. № 4. С. 181-212. Http//www.math.spbu.ru/user/diffjournal.

10. Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре.IV_2./ / Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный журнал]. 2010. № 4. С. 6-17. Http//www.math.spbu.ru/user/diffjournal.

11. Андреев А.Ф., Андреева И.А. О поведении траекторий одного класса кубических динамических систем. // ЕНО. 2017. Т.1. №3 (25). С. 1-2.

12. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Исследование особой точки O (0, 0) широкого семейства кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 11 (33). С. 1-3.

13. Andreev Alexey, Andreeva Irina. Investigation of a family of cubic dynamic systems. // Vibroengineering PROCEDIA. 2017. Vol. 15. P. 88-93.