УДК 517.946

Обратная задача для интегро - дифференциальных уравнений параболического типа

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Прикладная математика, информатика и компьютерные технологии»
Эгембердиева Жазгул Мырзабековна, магистрантка кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына (Кыргызская Республика, г. Бишкек)

Аннотация. *Рассматривается обратная задача для интегро-дифференциального уравнения параболического типа. Обратная задача заключается в определении ядра в интегро-дифференциальном параболическом уравнении по переопределению во внутренней точке. Применением метода операторных уравнений Вольтерра доказана локальная разрешимость изучаемой обратной задачи.*
Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, переопределение,ядро.*

The inverse problem for integro - differential equations of parabolic type

Ablabekov B.S., Egemberdieva G.M.

Annotation. *The inverse problem for integro–differential equation of parabolic type is considered. The inverse problem consists in determining of kernel in integro - differential parabolic equation using the solution of the direct problem. Using the method of Volterra operator equations, the local solvability of the inverse problem is proved.*
Keywords: *integrodifferential equation, inverse problem, kernel, overdetermination condition.*

Введение

Впервые обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений исследовались в работах итальянского математика А.Лоренци [1-2], где были изучены задачи об определении ядра интегро-дифференциальных уравнений гиперболического и параболического типов с распределенными источниками возмущений.

В работах [3,4, 6-7] исследуются вопросы локальной разрешимости обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений параболического, гиперболического и псевдопараболического типов.

В работе [8] исследовано вопрос о единственности решения обратной задачи определения многомерного ядра в интегро-дифференциальном параболическом уравнении.

В данной работе исследуется вопрос о локальной разрешмости обратной задачи определения ядра в интегро-дифференциальном параболическом уравнении, где прямая задача рассматривается в бесконечной по x области.

1.Постановка и исследование задачи

Пусть $Q_T=\{(x,t)\,|\, x\in(-\infty,+\infty), 0<t\le T\}$. Рассмотрим задачу Коши, состоящую в нахождении функцию $u(x,t)$ уравнения

$$u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=\int_0^t K(t-\tau)u(x,\tau)d\tau+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in(-\infty,+\infty), \tag{2}$$

В обратной задаче требуется определить пару функций $\{u(x,t),K(t)\}$, по дополнительной информации о решении прямой задачи:

$$u(0,t)=h(t),\ 0\le t\le T\,. \tag{3}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi(x)\in C^2(-\infty,+\infty)$, $h(t)\in C^{(2)}[0,T]$, $f(x,t)\in C_b^{(2,1)}(\bar{Q}_T)$ заданы и $h(0)=\varphi(0)\ne 0$, $\varphi(x)\in C_b^{(2)}(-\infty;+\infty)$. Тогда в области Q_T существует единственное решение обратной задачи (1) -(3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя свойства свертки, уравнение (1) перепишем в виде

$$u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=\int_0^t K(\tau)u(x,t-\tau)d\tau+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T \tag{4}$$

Учитывая условие (3), из (4) при $x=0$ имеем

$$h'(t)=a^2u_{xx}(0,t)+\int_0^t K(\tau)h(t-\tau)d\tau+f(0,t)\cdot$$

Продифференцировав еще раз это равенство по t, получим

$$K(t)=bu_{xxt}(0,t)+\int_0^t K(\tau)H(t-\tau)d\tau+h_1(t), \tag{5}$$

где

$$h_1(t)=-\frac{h''(t)-f'(0,t)}{h(0)},\quad H(t)=-\frac{h'(t)}{h(0)},\quad b=\frac{a^2}{h(0)}.$$

Если известна функция $u_{xxt}(0,t)$, то из (5) единственным образом определяется функция $K(t)$.

Введем обозначение

$$u_{xx}(x,t)=V(x,t). \tag{6}$$

Тогда из (1), (2) имеем

$$V_t(x,t)-a^2V_{xx}(x,t)=\int_0^t K(\tau)V(x,t-\tau)d\tau+f_{xx}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{7}$$

$$V(x,0)=\varphi''(x),\ \ x\in(-\infty,+\infty). \tag{8}$$

Обращая оператор $\dfrac{\partial}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, из задачи (7), (8) получим

$$V(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t-\tau)\left[\int_0^\tau K(s)V(\xi,\tau-s)ds\right]d\xi d\tau+ \tag{9}$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\varphi''(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t-\tau)f_{\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2a^2t}\right). \tag{10}$$

Продифференцировав (10) по t, имеем

$$V_t(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(x,\xi,t-\tau)\left[\int_0^\tau K(s)V(\xi,\tau-s)ds\right]d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,0)\left[\int_0^t K(s)V(\xi,t-s)ds\right]d\xi+$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(x,\xi,t)\varphi''(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(x,\xi,t-\tau)f_{\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,0)f_{\xi\xi}(\xi,0)d\xi.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,0)\left[\int_0^t K(s)V(\xi,t-s)ds\right]d\xi=\int_0^t K(\tau)V(\xi,t-\tau)d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,0)f_{\xi\xi}(\xi,0)d\xi=f_{xx}(x,0),$$

получим

$$V_t(x,t)=\int_0^t\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(x,\xi,t-\tau)K(s)V(\xi,\tau-s)dsd\xi d\tau+\int_0^t K(s)V(x,t-s)ds+f_1(x,t), \tag{11}$$

где

$$f_1(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(x,\xi,t)\varphi''(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(x,\xi,t-\tau)f_{\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+f_{xx}(x,0). \tag{12}$$

Заметим, что при условиях теоремы $f_1(x,t)$ - непрерывная функция своих аргументов. Положив в уравнении (11) $x=0$, имеем

$$V_t(0,t)=\int_0^t\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(0,\xi,t-\tau)K(s)V(\xi,\tau-s)dsd\xi d\tau+\int_0^t K(s)V(0,t-s)ds+f_1(0,t), \tag{13}$$

Учитывая $V_t(0,t)=u_{xxt}(0,t)$ и подставляя (13) в (5), получим

$$K(t)=\int_0^t K(\tau)H(t-\tau)d\tau+b\int_0^t K(s)V(0,t-s)ds+ \tag{14}$$
$$+b\int_0^t\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(0,\xi,t-\tau)K(s)V(\xi,\tau-s)dsd\xi d\tau+h_1(t)+bf_1(0,t).$$

С другой стороны, при условии $x=0$ из (9) имеем

$$V(0,t)=\int_0^t\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}G(0,\xi,t-\tau)K(s)V(\xi,\tau-s)dsd\xi d\tau+f_2(t), \tag{15}$$

где

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi''(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau) f_{\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

является непрерывной функцией.

Система (9), (14), (15) представляет собой систему нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра относительно функции $K(t), V(x,t), V(0,t)$. Применяя к этой системе метод операторных уравнений Вольтерра [4,5], приходим к заключению теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Литература:

1.A. Lorenzi. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory/ A.Lorenzi,E.Paparoni // Rend.Sem.Mat. Univ. Padova,1992, №87, p.105-138.
2.A. Lorenzi. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation /A.Lorenzi // Nonlinear Anal.:Theory method Appl., 22,1994.-p.297-321.
3.A. L. Bukheym. Inverse problems of memory reconstruction / Bukheym A.L. //J. Inverse and iil-posed Probl. 1(3) 1993.-p.193-205.
4.Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений / Б.С.Аблабеков. - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.
5.Романов В.Г. Обратные задачи математической физики / В.Г.Романов. –М.: Наука, 1984. – 264 с.
6.Дурдиев Д.К. Обратная задача об определения двух коэффициентов в одном интегро-дифференциальном волновом уравнении /Д.К.Дурдиев // Сиб.,журн.индустр.матем., 12(3), 2009.-С.28-40.
7.Дурдиев Д.К. Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области / Д.К.Дурдиев, Ж.Ш. Сафаров // Математические заметки, 97(6),2015. -С.855-867.
8.Дурдиев Д.К. О единственности определения ядра интегро- дифференциального параболического типа / Д.К.Дурдиев //Вестн.Сам.гос.техн.ун-та.Сер.Физ.-мат.науки, 2015.Т.19,№4. -С.658- 666.