www.esa-conference.ru

УДК 517.946

Обратная задача определения ядра в интегро-дифференциальном псевдопараболическом уравнении

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Прикладная математика, информатика и компьютерные технологии»
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына (Кыргызская Республика, г. Бишкек),
Курманбаева Айнура Кудайбергеновна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики
Кыргызско-Российский университет им.Б.Н.Ельцина (Кыргызская Республика, г. Бишкек),
Керимбекова Азима Насыпбековна, магистрант кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына (Кыргызская Республика, г. Бишкек)

Аннотация. *В работе рассматривается одномерное интегро-дифференциальное псевдопараболическое уравнение, возникающее в теории нестационарной фильтрации с запаздыванием в вязкой слабо сжимаемой жидкости в упругодеформируемой однородной пористой среде. Прямая задача заключается в определении функции скорости из начально-краевой задачи для этого уравнения, а обратная задача - в определении ядра в одномерном псевдопараболическом интегро-дифференциальном уравнении по известному решению прямой задачи для этого уравнения. Доказана теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой обратной задачи и получена оценка устойчивости решения обратной задачи. Обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода для неизвестных функций. К полученной системе в пространстве непрерывных функций применяется принцип сжатых отображений.*

Ключевые слова: *обратная задача, интегро-дифференциальное уравнение,* псевдопараболическое уравнение, ядро.

The inverse problem of determining the kernel in an integro-differential pseudoparabolic equation

Annotation. *The paper considers a one-dimensional integro-differential pseudoparabolic equation arising in the theory of non-stationary filtration with delay in a viscous weakly compressible fluid in an elastically deformable homogeneous porous medium. The direct problem is to determine the velocity function from the initial-boundary value problem for this equation. The inverse problem is to determine the kernel in a one-dimensional pseudoparabolic integro-differential equation from the known solution of the direct problem for this equation. A theorem on the unique solvability of the considered inverse problem is proved, and an estimate of the stability of the solution to the inverse problem is obtained. The inverse problem is replaced by an equivalent system of integral equations of the Volterra type of the second kind for unknown functions. The contraction mapping principle is applied to the resulting system in the space of continuous functions.*

Keywords: *inverse problem, integro-differential equation, pseudo-parabolic equation, kernel.*

Введение

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является бурно развивающейся областью современной математики, физики и техники. Обратные задачи возникают в самых различных областях науки, таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики.

Прямые задачи для псевдопараболических уравнений с различными начальными и граничными условиями изучены в работах [1-6].

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных второго и третьего порядков изучались во многих работах. Более подробно об этом можно ознакомиться в монографиях [1], [7]-[9].

В работах [10,11] исследованы обратные задачи восстановления ядра в параболическом, гиперболическом уравнении второго порядка, а в работе [1] изучены обратные задачи определения ядра в одномерном интегро-дифференциальном псевдопараболическом уравнении.

Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t(x,t)-u_{xxt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=\int_0^t k(\tau)u(x,t-\tau)d\tau+f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_T, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{2}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t),\quad 0\le t\le T, \tag{3}$$

где $f(x,t),\mu_1(t),\mu_2(t),\varphi(x)$ – заданные функции.

Уравнение (1) имеет реальный физический смысл, оно возникает в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей Кельвина-Фойгта в одномерном случае [12].

Обратную задачу сформулируем следующим образом: найти ядро $k(t)$ в уравнении (1), если задана дополнительная информация относительно решении прямой задачи (1)-(3):

$$u(x_0,t)=g(t),\ 0<x_0<l,\ 0\le t\le T. \tag{4}$$

Здесь $g(t)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Пусть для данных обратной задачи (1)-(4) выполнены следующие условия согласования:

$$\varphi(0)=\mu_1(0),\ \varphi(l)=\mu_2(0),\ g(0)=\varphi(x_0),$$
$$\mu_1'(0)-(\varphi''(0)+u_{xxt}(0,0))=f(0,0), \tag{5}$$
$$\mu_2'(0)-(\varphi''(l)+u_{xxt}(l,0))=f(l,0),$$

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы локальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x,t)\in C^{0,1}(\bar\Omega_T)$, $\varphi(x)\in C^2[0,l]$, $g(t)\in C^2[0,T]$ $|\varphi(x_0)|\ge\alpha>0$ и выполнены условия согласования (5). Кроме того, $\gamma=\int_0^l G(x_0,\xi)\varphi(\xi)d\xi\ne 0$. Тогда обратная задача (1) -(4) для достаточно малых T имеет единственное решение, непрерывно зависящее от данных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя оператор $\partial/\partial t$ к обеим частям уравнения (1), и, вводя функцию $u_t=v$, из (1) -(4) получим

$$v_t-v_{xxt}-v_{xx}=k(t)\varphi(x)+\int_0^t k(\tau)v(x,t-\tau)d\tau+f_t(x,t), \tag{6}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\ 0\le x\le l, \tag{7}$$

$$v(0,t)=\mu_1'(t),\ v(l,t)=\mu_2'(t), \tag{8}$$

$$v(x_0,t)=g'(t),\ 0<x_0<l,\ 0\le t\le T. \tag{9}$$

Здесь $v_0(x)$ - решение краевой задачи

$-v_{xx}(x,0)+v(x,0)=\varphi''(x)+f(x,0)$, $v(0,0)=\mu_1'(0),\ v(l,0)=\mu_2'(0)$,

которая имеет вид

$$v_0(x)=-\frac{shx}{shl}\int_0^l sh(1-s)\left[\varphi''(s)+f(s,0)\right]ds+\int_0^x sh(x-s)\left[\varphi_0''(s)+f(s,0)\right]ds- \tag{10}$$
$$-\frac{sh(x-l)}{shl}\mu_1'(0)+\frac{shx}{shl}\mu_2'(0).$$

Введем функцию $v(x,t)=e^{-t}w(x,t)$. Тогда задача (6) - (9) примет вид

$$(-w_{xx}+w)_t=w+e^tk(t)\varphi(x)+\int_0^t k(\tau)e^{(t-\tau)}w(x,t-\tau)d\tau+e^tf_t(x,t), \tag{11}$$

$$w(x,0)=v_0(x), \tag{12}$$

$$w(0,t)=e^t\mu_1'(t),\quad w(l,t)=e^t\mu_2'(t). \tag{13}$$

$$w(x_0,t)=e^tg'(t). \tag{14}$$

Чтобы получить дополнительное условие, положим в уравнении (11) $x=x_0$ и используем условие (14). Тогда после несложных преобразований, получим

$$-w_{xxt}(x_0,t)=e^tg''(t)+e^tk(t)\varphi(x_0)+\int_0^t k(\tau)e^{(t-\tau)}g'(t-\tau)d\tau+e^tf_t(x_0,t). \tag{15}$$

Таким образом, обратная задача (1)-(4) свелась к задаче определения функции $k(t)$ из соотношений (11) -(15).

Так как $g(0)=\varphi(x_0)$ и $|\varphi(x_0)|\ge\alpha>0$, то

$k(0)=\left[w_{xxt}(x_0,0)-g''(0)-f_t(x_0,0)\right]/\varphi(x_0)$.

Обратную задачу (7)-(10),(12) заменим эквивалетной системой интегральных уравнений. Из (11), (13), обращая оператор $-d^2/dx^2+I$, получим

$$w_t(x,t)=\int_0^l G(x,\xi)\left[w(\xi,t)+e^tk(t)\varphi(\xi)+\int_0^t k(\tau)e^{(t-\tau)}w(\xi,t-\tau)d\tau\right]d\xi+ \tag{16}$$
$$+\int_0^l G(x,\xi)e^tf_t(\xi,t)d\xi+\frac{e^tsh(l-x)}{shl}\mu_1'(t)+\frac{e^tsh(x)}{shl}\mu_2'(t),$$

где

$$G(x,\xi)=\frac{1}{shl}\begin{cases} shx\,sh(l-\xi), & 0\le x\le\xi,\\ sh\xi\,sh(l-x), & \xi\le x\le l.\end{cases}$$

Применив к уравнению (16) оператор $\partial^2/\partial x^2$ и учитывая (14), получим

$$w_{txx}(x_0,t)=\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)\left[w(\xi,t)+e^t k(t)\varphi(\xi)+\int_0^t k(\tau)e^{(t-\tau)}w(\xi,t-\tau)d\tau\right]d\xi+ \tag{17}$$

$$+\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^t f_t(\xi,t)d\xi+\frac{e^t sh(l-x_0)}{shl}\mu_1^{'}(t)+\frac{e^t sh(x_0)}{shl}\mu_2^{'}(t).$$

Учитывая

$$\int_0^l G_{xx}(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=\varphi(x)+\int_0^l G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

$$\int_0^l G_{xx}(x,\xi)w(\xi,t)d\xi=w(x,t)+\int_0^l G(x,\xi)w(\xi,t)d\xi,$$

и подставляя (17) в (15), после некоторых преобразований имеем

$$k(t)=-\frac{1}{\gamma}\int_0^t\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^{-\tau}k(t-\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau+\frac{1}{\gamma}\int_0^t k(\tau)e^{-\tau}g'(t-\tau)d\tau- \tag{18}$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^{-t}w(\xi,t)d\xi+F(t),$$

где

$$F(t)=g^{'}(t)+f_t(x_0,t)-\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^t f_t(\xi,t)d\xi-\frac{e^t sh(l-x_0)}{shl}\mu_1^{'}(t)-\frac{e^t sh(x_0)}{shl}\mu_2^{'}(t).$$

С другой стороны, проинтегрировав соотношение (16) по переменной t от 0 до t, получим

$$w(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)w(\xi,\tau)d\xi+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)k(\tau)e^{\tau}\varphi(\xi)d\xi d\tau- \tag{19}$$

$$-\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)\left[\int_0^{\tau}k(\tau-\tau_1)e^{(\tau-\tau_1)}\cdot w(\xi,\tau_1)d\tau_1\right]d\xi d\tau+F_1(x,t),$$

где

$$F_1(x,t)=\int_0^t\left[\int_0^l G(x,\xi)e^{\tau}f_{\tau}(\xi,\tau)d\xi+\frac{e^{\tau}sh(l-x)}{shl}\mu_1^{'}(\tau)+\frac{e^{\tau}sh(x)}{shl}\mu_2^{'}(\tau)\right]d\tau+v_0(x).$$

Система (18), (19) представляет собой систему нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода относительно функций $w(x,t),\ k(t)$.

Докажем, что для достаточно малых $T>0$ для этой системы уравнений в области $\bar{\Omega}_T$ имеет место принцип сжатых отображений. Для этого запишем эту систему в виде операторного уравнения

$$z=Az, \tag{20}$$

где z – векторная функция переменных x,t с компонентами z_1,z_2, причем

$z_1(x,t)=w(x,t),\ z_2(x,t)=z_2(t)=k(t),$

а оператор A определен на множестве функций $z\in C(\bar{\Omega}_T)$ и в соответствии с равенствами (18),(19) имеет вид $A=(A_1,A_2)$:

$$A_1 z=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)z_1(\xi,\tau)d\xi+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)z_2(\tau)e^{\tau}\varphi(\xi)d\xi d\tau- \tag{21}$$

$$-\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)\left[\int_0^{\tau}z_2(\tau-\tau_1)e^{(\tau-\tau_1)}\cdot z_1(\xi,\tau_1)d\tau_1\right]d\xi d\tau+F_1(x,t),$$

$$A_2 z=-\frac{1}{\gamma}\int_0^t\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^{-\tau}z_2(t-\tau)z_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+\frac{1}{\gamma}\int_0^t z_2(\tau)e^{-\tau}g'(t-\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^{-t}z_1(\xi,t)d\xi+F(t).$$

Покажем, что при достаточно малых T оператор A осуществляет сжатое отображение шара радиуса r с центром в точке $z_0=(z_{01},z_{02})$:

$z_{01}=F_1(x,t),\ z_{02}=F(t)$

на себя. Тем самым мы покажем, что уравнение (20) имеет в области $\bar{\Omega}_T$ при достаточно малом T единственное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\|z-z_0\|\le\|z_0\|(T). \tag{22}$$

Норму $\|z\|$ определим равенством

$$\|z\|(t_0)=\max_{1\le k\le 2}\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_T}|z_k(x,t)|.$$

Очевидно, что для Z элементов , принадлежащих шару $S(z_0,r)$ имеет место неравенство

$$\|z\|(T)\le 2\|z_0\|(T)=K. \tag{23}$$

С другой стороны, непосредственно оценивая интегралы входящие в (21), находим

$$\|A_1 z - z_0\|(t_0) \le \left\|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)z_1(\xi,\tau)d\xi d\tau\right\| + \left\|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)z_2(\tau)e^{\tau}\varphi(\xi)d\xi d\tau\right\| +$$

$$+\left\|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)\left[\int_0^{\tau} z_2(\tau-\tau_1)e^{(\tau-\tau_1)}\cdot z_1(\xi,\tau_1)d\tau_1\right]d\xi d\tau\right\| \le I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \left\|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)z_1(\xi,\tau)d\xi d\tau\right\| = \max_{x,t}\left|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)z_1(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \le$$

$$\le KT\max_x\left|\int_0^l G(x,\xi)d\xi\right| = AKT,$$

$$I_2 = \left\|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)z_2(\tau)e^{\tau}\varphi(\xi)d\xi d\tau\right\| = \max_{x,t}\left|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)z_2(\tau)e^{\tau}\varphi(\xi)d\xi d\tau\right| \le$$

$$\le K\|\varphi\|AT,$$

$$I_3 = \left\|\int_0^t\int_0^l G(x,\xi)\left[\int_0^{\tau} z_2(\tau-\tau_1)e^{(\tau-\tau_1)}\cdot z_1(\xi,\tau_1)d\tau_1\right]d\xi d\tau\right\| = K^2AT,$$

где

$$A = \max_{0\le x\le l}\left|\int_0^l G(x,\xi)d\xi\right| = \max_{0\le x\le l}\left|cthl(shx + sh(l-x)) - 1\right|.$$

Это значит,

$$\|A_1 z - z_0\|(t_0) \le KT\left(A + A\|\varphi\| + KA\right).$$

Для выполнения неравенства $\|A_1 z - z_0\|(t_0) \le K$ должно выполняться неравенство

$$KT\left(A + A\|\varphi\| + KA\right) \le K.$$

Из этого следует, что

$$T\left(A + A\|\varphi\| + KA\right) < 1.$$

Оценим $\|A_2 z - z_0\|$:

$$\|A_2 z - z_0\| \le \left\|\frac{1}{\gamma}\int_0^t\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^{-\tau}z_2(t-\tau)z_1(\xi,\tau)d\xi d\tau\right\| + \left\|\frac{1}{\gamma}\int_0^t z_2(\tau)e^{-\tau}g'(t-\tau)d\tau\right\| +$$

$$+\left\|\frac{1}{\gamma}\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^{-t}z_1(\xi,t)d\xi\right\| \le I_4 + I_5 + I_6,$$

$$I_4 = \left\|\frac{1}{\gamma}\int_0^t\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^{-\tau}z_2(t-\tau)z_1(\xi,\tau)d\xi d\tau\right\| =$$

$$= \max_{x,t}\left|\frac{1}{\gamma}\int_0^t\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^{-\tau}z_2(t-\tau)z_1(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \le \frac{1}{|\gamma|}BTK^2,$$

$$I_5 = \left\|\frac{1}{\gamma}\int_0^t z_2(\tau)e^{-\tau}g'(t-\tau)d\tau\right\| \le \frac{1}{|\gamma|}T\|g'\|K,$$

$$I_6 = \left\|\frac{1}{\gamma}\int_0^l G_{xx}(x_0,\xi)e^{-t}z_1(\xi,t)d\xi\right\| \le \frac{1}{|\gamma|}TKB,$$

где

$$B = \max_{0\le x\le l}\int_0^l\left|G_{xx}(x_0,\xi)\right|d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$\|A_2 z - z_0\| \le \frac{TK}{|\gamma|}\left[BK + \|g'\| + B\right]$$

Для выполнения неравенства $\|A_2 z - z_0\|(t_0) \le K$ должно выполняться

$$\frac{TK}{|\gamma|}\left[BK + \|g'\| + B\right] \le K.$$

Из этого следует, что $\frac{T}{|\gamma|}\left[BK + \|g'\| + B\right] < 1.$

Таким образом,

$$\|Az - z_0\| \le KT\max\left(\left(A + A\|\varphi\| + KA\right), \frac{1}{|\gamma|}\left[BK + \|g'\| + B\right]\right).$$

Поэтому, при $T \le T^*$ оператор A переводит $S(z_0, r)$ в себя, где T^* определяется равенством

$$T^* = \min\left(\frac{1}{K\left(A + A\|\varphi\| + KA\right)}, \frac{1}{\frac{K}{|\gamma|}\left[BK + \|g'\| + B\right]}\right). \tag{24}$$

Пусть теперь z, z_2 – любые два элемента из множества $S(z_0, r)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида

$$\left|z_i^1 z_k^1 - z_i^2 z_k^2\right| \le \left|z_k^1 - z_k^2\right|\left|z_i^1\right| + \left|z_i^1 - z_i^2\right|\left|z_k^2\right| \le 4K\left\|z^1 - z^2\right\|(T),$$

получим

$$\left\|Az^1 - Az^2\right\| \le \left\|z^1 - z^2\right\|(T)\max\left(K\left(A + A\|\varphi\| + KA\right), \frac{K}{|\gamma|}\left[BK + \left\|g'\right\| + B\right]\right) \le$$

$$\le \frac{T}{T^*}\left\|z^1 - z^2\right\|(T).$$

Отсюда следует, что $\left\|Az^1 - Az^2\right\|(t_0) \le \frac{T}{T^*}\left\|z^1 - z^2\right\|$ и оператор А осуществляет сжатое отображение шара $S(z_0, r)$ на себя. Тогда, согласно теореме С.Банаха, уравнение (20) имеет единственное решение, принадлежащее этому шару. Следовательно, решая систему уравнений (18), (19) методом последовательных приближений, мы однозначно построим в области $\bar{\Omega}_T$ для $t_0 \in (0, T^*)$ функции $w(x,t), k(t)$ в классе $C^{(2,1)}(\bar{\Omega}_T) \times C([0,T])$. Тем самым, однозначно определим функцию $k(t)$ на отрезке $[0, T^*]$. Далее последовательно находим $v(x,t)$, а затем $u(x,t)$. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f_i(x,t), \varphi_i(x), \mu_1^i(t), \mu_2^i(t), \nu_i(t), i = 1,2$ - данные обратной задачи (1)-(4). Тогда для отвечающих им решений $k_1(t), k_2(t)$ справедлива оценка

$$\left\|k_1(t) - k_2(t)\right\|_{C([0,T])} \le C[\left\|g_1 - g_2\right\|_{C^2([0,T])} + \left\|f_1 - f_2\right\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega}_T)} + \left\|u_{01} - u_{02}\right\|_{C^2([0,l])} +$$

$$+\left\|\mu_1^1 - \mu_1^2\right\|_{C^1([0,T])} + \left\|\mu_2^1 - \mu_2^2\right\|_{C^1([0,T])}],$$

где константа С зависит только от норм функций $u_1, u_2, f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, K_1, K_2$ и параметров T, x_0.

Доказательство теоремы 2 можно получить непосредственно из системы интегральных уравнений (18), (19).

Литература:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. Бишкек: Илим, 2001. – 180с.

2. Аблабеков, Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи // Наука и новые технологии. –1999.- №4. – С. 12– 19.

3. Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. Краевая задача на полупрямой для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 32. № 3. С. 29-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41.

4. Аблабеков Б. С., Курманбаева А. К. Решение некоторых начальных и краевых задач для уравнения жидкости в трещиновато-пористой среде // Известия КГТУ им. И.Раззакова.2011. Т. 22. С. 235–239.

5. Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. Первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром // Евразийское Научное Объединение. 2019. Т. 1. № 4 (50). С.1-5.

6. Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2018. №11. С. 7-11.

7. Аблабеков Б.С., Асанов А.Р., Курманбаева А.К. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. Бишкек: Илим, 2011. – 156 с.

8. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 264 с.

9. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. – М.: Научный Мир, 2005. – 296 с.

10. Аблабеков Б.С., Эгембердиева Ж.М. Обратная задача для интегро- дифференциальных уравнений параболического типа // Евразийское Научное Объединение. 2019. № 5-1 (51). С. 4-6.

11. Дурдиев Д.К. Обратные задачи для сред с последействием. – Т.: TURON- IQBOL, 2014. – 232 с.

12. Осколков А. П., Ахматов М. М. Корректные постановки начально-краевых задач для уравнений фильтрации жидкости с запаздыванием, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1986, том 150, 76–86.