www.esa-conference.ru

УДК 517.956

О разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Прикладная математика, информатика и компьютерные технологии»
Жороев Автандил Кемелович, аспирант кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына (Кыргызская Республика, г. Бишкек)

Аннотация. *В работе изучается классическая разрешимость задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка. Исследован вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для этого уравнения.*

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, задача Коши, единственность, существование, уравнение Вольтерра.*

On the solvability of the Cauchy problem for a third-order hyperbolic equation

Ablabekov B.S., Goroev A.K.

Annotation. *In this paper, we study the classical solvability of the Cauchy problem for a third-order hyperbolic equation. The question of the existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem for this equation is investigated.*

Keywords: *hyperbolic equation, Cauchy problem, uniqueness, existence, Volterra equation.*

Введение

Хорошо известно, что распространение акустических волн в однородной среде с дисперсией и поглощением описывается уравнение [3,4]

$$\tau\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_\infty^2\Delta u\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\Delta u\right)=0, \qquad (0.1)$$

$u(x,t)$ -давление, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\Delta-$оператор Лапласа по x и положительные постоянные τ, c_∞ и c_0 имеют смысл релаксации и предельных фазовых скоростей звука соответственно.Введем безразмерные переменные $x=x/c_\infty\tau, t=t/\tau,$ сохранив прежние обозначения положим, и $\alpha=c_0^2/c_\infty^2$.Тогда уравнение (0.1) для одномерной изотропной среды в новых переменных имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \qquad (0.2)$$

Для реальных сред $c_0^2<c_\infty^2$, следовательно $0<\alpha<1$.

Краевые задачи и задача Коши для уравнения вида (0.2) изучены в [3,4].

Явное классическое и обобщенное решение задачи Коши для уравнения (0.2) при $\alpha=1$ найдено в работе [1], оно имеетвид

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}e^{-(t-|s-x|)}[u_1(s)+u_0(s)]ds+\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)}\int_{x-\tau}^{x+\tau}[u_1(\xi)+u_2(\xi)]d\xi d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\tau\int_{x-(\tau-s)}^{x+\tau-s}f(\xi,s)dsd\xi d\tau+u_0(x)e^{-t}.$$

Используя методику работ [2,5], в данной работе доказывается теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения (0.2).

1. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), x\in R, t>0, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), u_{tt}(x,0)=u_2(x), x\in R. \qquad (2)$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Обозначим через $\Delta(0,T)$ треугольник на плоскости x,t, ограниченный осью x и характеристиками уравнения (4.3.15), проведенными через точку (x,t).

ТЕОРЕМА. Если $\alpha(x)\in C([0,l]),\ u_0(x)\in C^{(3)}(R),\ u_1(x)\in C^{(2)}(R)$ и $u_2(x)\in C^{(1)}(R)$, то существует единственное классическое решение задачи (1), (2), принадлежащее классу $u(x,t)\in C^{(2,3)}(Q_T)\bigcap C^{(2,1)}(\bar{Q}_T)$. Кроме того, это решение непрерывно, зависит от начальных данных $u_i(x),\quad i=0,1,2$ и их производных до второго порядка включительно

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha(x)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+(1-\alpha(x))\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,t),\ x\in R,\ t>0. \qquad (3)$$

Принимая во внимание условие $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x,0)=u_2(x)-u_0''(x),$ из задачи (2), (3) имеем

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)u(x,t)=\left[u_2(x)-u_0''(x)\right]e^{-\alpha(x)t}-\int_0^t e^{-\alpha(x)(t-\tau)}\left[(1-\alpha(x))u_{\tau\tau}+f(x,\tau)\right]d\tau, \qquad (4)$$

Проинтегрировав по частям интеграл стоящей в правой части (4), получим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)u(x,t)=v_0(x,t)-(1-\alpha(x))u_t(x,t)+(1-\alpha(x))\alpha(x)u(x,t)-$$
$$-(1-\alpha(x))\alpha^2(x)\int_0^t e^{-\alpha(x)(t-\tau)}u(x,\tau)d\tau, \qquad (5)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x), \qquad (6)$$

где

$$v_0(x,t)=\left[u_2(x)-u_0''(x)\right]e^{-\alpha(x)t}+(1-\alpha(x))u_1(x)e^{-\alpha(x)t}-(1-\alpha(x))\alpha(x)u_0(x)e^{-\alpha(x)t}+$$
$$+\int_0^t e^{-\alpha(x)(t-\tau)}f(x,\tau)d\tau.$$

Из (5), (6), после применения формулы Даламбера, получим

$$u(x,t)=v_1(x,t)+\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}(1-\alpha(\xi))\alpha(\xi)u(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^\tau\int_{x-(\tau-\tau_1)}^{x+(\tau-\tau_1)}(1-\alpha(\xi))\alpha^2(\xi)e^{-\alpha(\xi)(\tau-\tau_1)}u(\xi,\tau_1)d\xi d\tau_1 d\tau. \qquad (7)$$

где $v_1(x,t)-$ решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}=\bar{v}_0(x,t),\ v_1(x,0)=u_0(x),\quad v_{1t}(x,0)=u_1(x),$$

которая дается формулой

$$v_1(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_0(x+t)+u_0(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}u_1(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\bar{v}_0(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (8)$$

Здесь $\bar{v}_0(x,t)=v_0(x,t)-\int_{x-t}^{x+t}(1-\alpha(\xi))u_0(\xi)d\xi$.

Введем обозначение

$$K(x,\xi,t,\tau)=(1-\alpha(\xi))\alpha(\xi)-(1-\alpha(\xi))\alpha^2(\xi)(t-\tau)e^{-\alpha(\xi)(t-\tau)}.$$

Тогда уравнение (7) можно переписать в виде

$$u(x,t)=v_1(x,t)+\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}K(x,\xi,t,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (9)$$

Покажем теперь, что уравнение (9) определяет единственное непрерывное в области $\Delta(0,T)$ решение. Используем для этого метод последовательных приближений, представив $u(x,t)$ в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t), \qquad (10)$$

где $u_n(x,t), \quad n\ge 1$, находятся по формулам

$$u_n(x,t)=v_1(x,t)+\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}K(x,\xi,t,\tau)u_{n-1}(\xi,\tau)d\xi d\tau, n\ge 1, \quad (x,t)\in\Delta(0,T). \qquad (11)$$

Легко показать, что в условиях теоремы $v_1(x,t)\in C^3(\Delta(0,T))$. Формула (11) показывает, что все $u_n(x,t)\in C(\Delta(0,T))$.Обозначим

$$V_n(t)=\max_{-(t_0-t)\le x\le t_0-t}|u_n(x,t)|, \quad 0\le t\le T,$$

$$\alpha_0=\|\alpha\|=\max_{-(T-t)\le x\le T-t}|\alpha(x)|.$$

Оценим ядро $K(x,\xi,t,\tau)$. Тогда

$$\|K(x,\xi,t,\tau)\|=\left\|(1-\alpha(\xi))\alpha(\xi)-(1-\alpha(\xi))\alpha^2(\xi)(t-\tau)e^{-\alpha(\xi)(t-\tau)}\right\|\le\|(1-\alpha(\xi))\alpha(\xi)\|+$$

$$+\left\|(1-\alpha(\xi))\alpha^2(\xi)(t-\tau)e^{-\alpha(\xi)(t-\tau)}\right\|\le\|\alpha(\xi)\|\left(1+\|\alpha(\xi)\|\right)+$$

$$\left(\|\alpha^2(\xi)\|\left(1+\|\alpha(\xi)\|\right)\right)\left\|(t-\tau)e^{-\alpha(\xi)(t-\tau)}\right\|\le\alpha_1(1+T),$$

где $\alpha_1=\max\left\{\alpha_0(1+\alpha_0),\alpha_0^2(1+\alpha_0)\right\}$.

Тогда из (10) вытекает оценка

$$V_n(t)=\int_0^t\max_{-(T-t)\le t\le(T-t)}\left|\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}K(x,\xi,t,\tau)u_{n-1}(\xi,\tau)d\xi\right|d\tau\le\alpha_1(1+T)\int_0^t(t-\tau)V_{n-1}(\tau)d\tau. \qquad (12)$$

Применяя ее последовательно для $n=1,2,...,$ получим

$$|V_1(t)|\le M\alpha_1(1+T)\frac{t^4}{4!}, \qquad M=\max_{(x,t)\in\Delta(0,T)}|v_1(x,t)|,$$

$$|V_2(t)|\le\left(\alpha_1(1+T)\right)^2M\frac{t^8}{8!},$$

$$|V_3(t)|\le\left(\alpha_1(1+T)\right)^4M\frac{t^{12}}{12!}, \qquad (13)$$

$$|V_n(t)|\le\left(\alpha_1\left(1+T\right)\right)^nM\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Оценка (13) показывает, что ряд (10) сходится равномерно в области $\Delta(0,t_0)$, так как этот ряд мажорируется в $\Delta(0,t_0)$ сходящимся числовым рядом

$$M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha_1(1+T)\right)T^{2n}}{(2n)!}$$

и определяет непрерывную в области $\Delta(0,T)$ функцию $u(x,t)$, которая является решением уравнения (9).

Рассмотрим однородное уравнение

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}K(x,\xi,t,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (14)$$

Очевидно, что уравнение (14) имеет в классе непрерывных в $\Delta(0,T)$ функций только нулевое решение. Действительно, если

$$V(t)=\max_{-(T-t)\le x\le T-t}|u(x,t)|,$$

то из (14) вытекает

$$V(t)\le\alpha_1(1+T)\int_0^t(t-\tau)^2V(\tau)d\tau, \quad 0\le t\le T. \qquad (15)$$

Известно, что решение этого неравенства может быть только одно: $V(t)\equiv 0,$ и, следовательно, $u(x,t)\equiv 0, \quad (x,t)\in\Delta(0,T).$

Таким образом, мы показали существование единственного решения уравнения (7). Как и в работах [1,2] можно показать, что это решение имеет в $\Delta(0,T)$ непрерывные производные до третьего порядка и определяет классическое решение задачи (1), (2).

Литература:

1.Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] /Б.С.Аблабеков, А.Р.Асанов, А.К.Курманбаева. - Бишкек: Илим, 2011. – 156 с.

2.Аблабеков, Б.С. Интегральные уравнения Вольтерра и их приложения [Текст] / Б.С.Аблабеков. - Бишкек: КГТУ, 2009. - 148 с.

3.Варламов В.В. Об одной начально-краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка //Дифференц.уравнения. 1990. Т.26.№8. -С.1455-1457.

4.Варламов В.В. Энергетические оценки для интегродифференциального уравнения, описывающего акустические волны в среде с памятью //Журн. вычислит. математики и матем.физ., 1993.Т.33, №1. С.146-150.

5.Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. -254с.

6.Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука,1975.