www.esa-conference.ru

УДК 517.946

Первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физ.-мат. наук, профессор
кафедры «Прикладная математика, информатика и компьютерные технологии»
Муканбетова Айзат Темирбековна, аспирант
кафедры прикладной математики, информатики и компьютерных технологий
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына (Кыргызская Республика, г. Бишкек)

Аннотация. *В работе изучается первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром. С применением метода Фурье доказана теорема существования и единственности решения изучаемой задачи и получено явное решение. Кроме того, показано, что при* $\varepsilon \to +0$ *полученное решение стремится к решению соответствующей задачи для уравнения теплопроводности.*
Ключевые слова: *псевдопараболическое уравнение, начально-краевая задача, метод Фурье, классическое решение,малый параметр.*

The first initial boundary value problem for a one-dimensional pseudoparabolic equation with a small parameter

Ablabekov B.S., Mukanbetova A.T.

Abstract. *In this paper we study the first initial-boundary value problem for a one-dimensional pseudoparabolic equation with a small parameter.Using the Fourier method, a theorem on the existence and uniqueness of the solution of the problem under study is proved and an explicit solution is obtained. In addition, it is shown that when* $\varepsilon \to +0$ *the solution obtained tends to solve the corresponding problem for the heat equation.*
Keywords: *pseudoparabolic equation, initial-boundary problem, Fourier method, classical solution, small parameter.*

Введение

В работе [1] методом Фурье исследовано начально-краевая задача для одномерного пседопараболического уравнения с однородными граничными данными. Кроме того, в этой работе получено явное решение начально-краевой задачи и задачи Гурса для одномерного псевдопараболического уравнения, в том числе и для нагруженных уравнений. С точки зрения теории обратных задач представляет интерес, когда граничные условия является неоднородными..

В работах [2-5] были изучены различные краевые задачи, в том числе для линейного и полулинейного псевдопараболического уравнения, а также для уравнения Буссинеска –Лява.

В работах [6,7] исследованы вопросы об однозначной разрешимости задачи Гурса и различных локальных и нелокальных краевых задач для псевдопараболического уравнения

Целью работы является изучение первой начально-краевой задачи для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром и оценить влияние малого параметра.

1.Постановка и исследование задачи

Задачу нахождения функции $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}) \bigcap C^{2,1}(\Omega)$ по известным функциям из условий

$$u_t - \varepsilon^2 u_{xxt} - u_{xx} = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \; u(l,t) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где ε - малый параметр, $u_0(x)$, $\varphi(t), \psi(t)$ - заданные функции, будем называть прямой задачей.

Пусть для заданных функций выполнены следующие условия гладкости и условия согласования:

$$u_0(x) \in C^{(2)}([0,1]), \; \varphi(t), \psi(t) \in C^1([0,T]), \tag{4}$$

$$u_0(0) = \varphi(0) = 0, \; u_0(1) = \psi(0) = 0. \tag{5}$$

Как и в работе [1,2], сделав замену

$$u_\varepsilon(x,t) = v_\varepsilon(x,t) + w(x,t), \tag{6}$$

где $v_\varepsilon(x,t)$ - новая неизвестная функция, а

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$w(x,t)=\varphi(t)+x\left(\psi(t)-\varphi(t)\right),$$

задачу (1) -(3) сведем к задаче

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 v_\varepsilon}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}=(1-x)\varphi'(t)-x\psi'(t),\quad (x,t)\in\Omega_T, \qquad (7)$$

$$v_\varepsilon(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (8)$$

$$v_\varepsilon(0,t)=0,\ v_\varepsilon(1,t)=0,\ 0\le t\le T. \qquad (9)$$

Из приведенных рассуждений следует, что для доказательства однозначной разрешимости задачи (1) -(3), достаточно доказать теорему существования и единственности решения начально-краевой задачи (7) -(9).

Теорема. Пусть заданные функции удовлетворяют условия (4),(5).

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует единственное решение задачи (7) -(9), представимое в виде

$$v_\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)u_{0n}\sin(n\pi x)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\left(\left((-1)^n\psi(t)-\varphi(t)\right)\right)\sin(n\pi x)- \qquad (10)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n\pi)}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)^2}\int_0^t\left(\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right)\left[(-1)^n\psi(\tau)-\varphi(\tau)\right]\right)d\tau\sin(n\pi x),$$

где

$$u_{0n}=2\int_0^1 u_0(x)\sin(n\pi x)dx. \qquad (11)$$

Доказательство. Ищем решение задачи (7) -(9) в виде $v_\varepsilon(x,t)=v_\varepsilon^1(x,t)+v_\varepsilon^2(x,t)$:

$$\frac{\partial v_\varepsilon^1}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 v_\varepsilon^1}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 v_\varepsilon^1}{\partial x^2}=0,\quad (x,t)\in\Omega_T, \qquad (12)$$

$$v_\varepsilon^1(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (13)$$

$$v_\varepsilon^1(0,t)=0,\ v_\varepsilon^1(1,t)=0,\ 0\le t\le T, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial v_\varepsilon^2}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 v_\varepsilon^2}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 v_\varepsilon^2}{\partial x^2}=(1-x)\varphi'(t)-x\psi'(t),\quad (x,t)\in\Omega_T, \qquad (15)$$

$$v_\varepsilon^1(x,0)=0,\ 0\le x\le 1, \qquad (16)$$

$$v_\varepsilon^1(0,t)=0,\ v_\varepsilon^1(1,t)=0,\ 0\le t\le T. \qquad (17)$$

Как известно, из результатов работы [1], решение задачи (12) -(14) имеет вид

$$v_\varepsilon^1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)u_{0n}\sin(n\pi x), \qquad (18)$$

а $\lambda_n=n^2\pi^2,\quad X_n(x)=\sin n\pi x,\ n\in\mathrm{N}$, собственные значения и собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=X(1)=0.$$

В соответствии с методом Фурье решение задачи (15) -(17) ищем в виде

$$v_\varepsilon^2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_{\varepsilon n}^2(t)\sin(n\pi x). \qquad (19)$$

Тогда для определения функции $v_{\varepsilon n}^2(t)$, получим систему:

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$\begin{cases} \dfrac{dv_{\varepsilon n}^2(t)}{dt} + \dfrac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2} v_{\varepsilon n}^2(t) = \dfrac{1}{1+(\varepsilon n\pi)^2} f_n(t), \\ v_{\varepsilon n}^2(0) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$f_n(t) = 2\int_0^1 \left[(1-x)\varphi'(t) - x\psi'(t)\right]\sin(n\pi x)dx = -2(-1)^n (n\pi)^{-1}\psi'(t) + 2(n\pi)^{-1}\varphi'(t). \quad (21)$$

Решением задачи (20) является:

$$v_{\varepsilon n}^2(t) = \frac{1}{1+(\varepsilon n\pi)^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right) f_n(\tau)d\tau. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (19), получаем

$$v_\varepsilon^2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(\varepsilon n\pi)^2}\int_0^t \exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right) f_n(\tau)d\tau \sin(n\pi x).$$

Отсюда учитывая (21), получаем

$$v_\varepsilon^2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\Big(\big((-1)^n\psi(t) - \varphi(t)\big)\Big)\sin(n\pi x) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n\pi)}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)^2}\int_0^t \left(\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right)\left[(-1)^n\psi(\tau) - \varphi(\tau)\right]\right)d\tau \sin(n\pi x). \quad (23)$$

Суммируя (18) и (23), получаем формулу (10). Перейдем к обоснованию формулы (10). Сначала покажем, что $v_\varepsilon(x,t) \in C(\overline{\Omega}_T)$ и ряд (10) дает непрерывную на $\overline{\Omega}_T$ функцию. Для $v_{\varepsilon n}(x,t)$ получаем оценку. Из условий, наложенных на функции $u_0(x)$ следует, что

$$|u_{0n}| \le \frac{const}{n^2}.$$

Так как при $t > t_0 > 0, \quad 0 < \exp\left(-\dfrac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right) \le e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}}$,

$$\left|u_{0n}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\right| \le |u_{0n}|\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right) \le |u_{0n}| \le \frac{const}{n^2}e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}},$$

$$\left|\frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\Big(\big((-1)^n\psi(t) - \varphi(t)\big)\Big)\sin(n\pi x)\right| \le \left|\frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\right| |\psi(t)+\varphi(t)| \le$$

$$\le const\left[\frac{1}{((1+(\varepsilon n\pi)^2))^2} + \frac{1}{(n\pi)^2}\right],$$

$$\left|\frac{2(n\pi)}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)^2}\int_0^t \left(\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}(t-\tau)\right)\left[(-1)^n\psi(\tau) - \varphi(\tau)\right]\right)d\tau \sin(n\pi x)\right|$$

$$\le const\left|\frac{2}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)(n\pi)}\right|\left(1 - \exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\right) \le \left[\frac{1}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)^2} + \frac{1}{(n\pi)^2}\right],$$

то ряд (10) при $t \ge 0$ сходится равномерно и абсолютно. Поэтому функция $v_{\varepsilon n}(x,t)$, определяемая рядом (10), непрерывна в области $\overline{\Omega}_T$ и удовлетворяет начальному и граничным условиям. Остается показать, что функция $v_{\varepsilon n}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (7) в области Ω_T. Для этого достаточно показать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial v_{\varepsilon n}}{\partial t},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^3 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2\partial t}.$$

Так как

$$\left|\frac{\partial v_{\varepsilon n}^1}{\partial t}\right|=\left|-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}u_{0n}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\right|\le\left|u_{0n}\right|\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}}\le\frac{C}{n^2}\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}},$$

$$\left|\frac{\partial^2 v_{\varepsilon n}^1}{\partial x^2}\right|=\left|-(n\pi)^2u_{0n}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\right|\le(n\pi)^2\left|u_{0n}\right|\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t_0\right)\le$$

$$\le C\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}},$$

$$\left|\frac{\partial^3 v_{\varepsilon n}^1}{\partial x^2\partial t}\right|=\left|(n\pi)^2\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}u_{0n}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\right|\le$$

$$\le(n\pi)^2\left|u_{0n}\right|\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t_0\right)\le C\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t_0}{\varepsilon^2}}.$$

Аналогично из условий, наложенных на $\varphi(t),\quad \psi(t)$, вытекает сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty}v_{\varepsilon n}^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial v_{\varepsilon n}^2}{\partial t},$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 v_{\varepsilon n}^2}{\partial x^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^3 v_{\varepsilon n}^2}{\partial x^2\partial t}.$

Отсюда из оценок следует, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial v_{\varepsilon n}}{\partial t},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^3 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2\partial t}$ сходятся равномерно к $\frac{\partial v_{\varepsilon n}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^3 v_{\varepsilon n}}{\partial x^2\partial t}$ соответственно. Теорема доказана.

Следствие 1. Решение задачи (7)-(9) можно представить через функцию Грина в виде:

$$v_\varepsilon(x,t)=\int_0^1G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^lG_1(x,\xi,t-\tau)\left[(1-\xi)\varphi'(\tau)-\xi\psi'(\tau)\right]d\xi d\tau, \quad (24)$$

где

$$G(x,\xi,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\sin(n\pi\xi),$$

$$G_1(x,\xi,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+(\varepsilon n\pi)^2)}\exp\left(-\frac{(n\pi)^2}{1+(\varepsilon n\pi)^2}t\right)\sin(n\pi x)\sin(n\pi\xi).$$

Замечание 1. Из (24) переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получим решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=(1-x)\varphi'(t)-x\psi'(t),\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

$$v(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le1,$$

$$v(0,t)=0,\ v(1,t)=0,\ 0\le t\le T$$

Действительно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_{\varepsilon}(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_0^l G_1(x,\xi,t-\tau)\left[(1-\xi)\varphi'(\tau)-\xi\psi'(\tau)\right]d\xi d\tau=$$

$$=\int_0^1 G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\left[(1-\xi)\varphi'(\tau)-\xi\psi'(\tau)\right]d\xi d\tau,$$

где $G(x,\xi,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-(n\pi)^2 t\right)\sin(n\pi x)\sin(n\pi\xi)$.

Литература:

1.Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений / Б.С.Аблабеков. - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.

2.Аблабеков, Б.С. О разрешимости одной начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска-Лява /Б.С. Аблабеков, А.А. Касымалиева // Евразийское научное объединение. –2018.Т.1. –№11(45). –С.1 –6.

3. Аблабеков, Б.С. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром /Б.С. Аблабеков, А.Т.Муканбетова //Нака, новые технологии и инновации Кыргызстана. –2018. –№11. –С.7-11.

4.Аблабеков, Б.С. Приближенное решение краевой задачи для полулинейного псевдопараболического уравнения /Б.С. Аблабеков, З.А. Дурмонбаева// Евразийское научное объединение. –2018.Т.1. –№12(46). –С.3 –6.

5.Макаова Р.Х. Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера / Р.Х.Макаова // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). С. 45-49.

6.Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах / М.Х.Шхануков // Дифференц.уравнения. 1982. Т. 18. №4. С. 689–699.

7.Colton D. Pseudoparabolic Equations in One Space Variable / D.Colton // Journal of Differ. Equations.1972. vol. 12. no 3. pp. 559–565