www.esa-conference.ru

УДК 517.95

Об определении источника зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физико-математических наук, профессор;
Жороев Автандил Кемелович, аспирант
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына

Аннотация. *В работе рассматривается обратная задача для гиперболического уравнения третьего порядка. Ставится обратная задача, состоящая в определении неизвестного источника, зависящего от времени. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи задаются значения решения задачи во внутренней точке. Доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи. Доказательство основано на выводе линейной системы интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода и доказательстве его разрешимости.*

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, обратная коэффициентная задача, единственность, существование, уравнение Вольтерра.*

On the definition of a time-dependent source in a third-order hyperbolic equation

Ablabekov B.S., Goroev A.K.

Annotation. *This paper considers a linear inverse problem for a third-order hyperbolic equation. An inverse problem is posed, which consists in determining an unknown source that depends on time. As additional information for solving the inverse problem, we set the values of the solution to the problem at an interior point, and prove the existence and uniqueness theorem for the solution of the inverse problem. The proof is based on the derivation of a linear system of integral equations of the Volterra type of the second kind and the proof of its solvability.*

Keywords: *hyperbolic equation, inverse coefficient problem, uniqueness, existence, Volterra equation.*

Введение

Обратные задачи для гиперболических уравнений второго порядка изучены в основном В.Г.Романовым, С.И.Кабанихиным и их учениками [5]- [7].

Обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка – сравнительно молодое направление в теории обратных задач. Вопросы разрешимости различных обратных задач для гиперболических, псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка изучались в работах [1-4]. Ранее обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка в различных постановках, но отличных от рассматриваемых в настоящей работе изучены в [4]. В работе [3] построено решение задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка. Получено явное решение, аналогичное формуле Даламбера. В [4] методом операторных уравнений Вольтерра исследована коэффициентная обратная задача для гиперболического уравнения третьего порядка. В данной работе исследуется обратная задача, состоящая в определении источника, зависящего от времени в линейном гиперболическом уравнении третьего порядка по дополнительной информации о решении этого уравнения. Доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи. Доказательство основано на сведении обратной задачи к линейному операторному уравнению, которое представляет собой систему линейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций, и последующем применении принципа сжимающих отображений.

2.Постановка задачи и основные результаты

Прямая задача. Рассмотрим задачу Коши для функции $u(x,t)$:

$$L_q u = f(t)h(x,t) + g(x,t), (x,t) \in D_T = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}; \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u_{tt}(x,0) = u_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u.$$

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x,t)$ по известным функциям $f(t), h(x,t), g(x,t)$ и $u_i(x), i = 0,1,2.$

Обратная задача. Найти функцию $f(t) \in C[0,t_0]$, если о решении прямой задачи (1), (2) известна дополнительная информация

$$u(0,t)=\varphi(t),\ 0\le t\le t_0. \qquad (3)$$

Другими словами, требуется по известным функциям $h(x,t), g(x,t)\ u_i(x),\quad i=0,1,2$ найти пару функций $\{u(x,t), f(t)\}$, удовлетворяющих (1)-(4).

Пусть $\Delta_1(x,t)=\{(s,\tau): 0\le\tau\le t,\ x-t+\tau\le s\le x+t-\tau\}$.

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 1. Если для какого - либо $t_0>0,\ x_0\in$ □ функции $f(t)\in C[0,t_0],\quad u_i(x)\in C^{3-i}([x_0-t_0,x_0+t_0]),\ i=0,1,2,$ $f\in C^1(\Delta_1(x_0,t_0))$, то в области $\Delta_1(x_0,t_0)$ существует единственная функция $u(x,t)$ такая, что $u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}$, $u_{ttt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx}\in C(\Delta_1(x_0,t_0))$ и удовлетворяет задаче (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(x,t)$ есть решение задачи (1), (2), при $f(t)=0$ и это решение определяется формулой [6]:

$$v(x,t)=\frac{1}{4}u_0(x+t)+\frac{3}{4}u_0(x-t)+\frac{t}{2}u_0'(x-t)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}u_1(s)ds+\frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}(x+t-s)u_2(s)ds+\frac{1}{4}\iint_{\Delta_1(x,t)}(x-s+t-\tau)g(s,\tau)dsd\tau\,. \qquad (4)$$

Тогда решение задачи (1) -(2) можно записать в явном виде:

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{1}{4}\iint_{\Delta_1(x,t)}(x-s+t-\tau)f(\tau)h(s,\tau)dsd\tau,\ (x,t)\in\Delta_1(x_0,t_0)\,. \qquad (5)$$

Как и в работе [4], покажем , что это решение в области $\Delta_1(x_0,t_0)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка и определяет классическое решение задачи (1),(2). С этой целью перепишем двойной интеграл по области $\Delta_1(x,t)$ в (6) в виде повторного

$$u(x,t)=v(x,t)-\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}(x-s+t-\tau)f(\tau)h(s,\tau)dsd\tau. \qquad (6)$$

Так как $v(x,t)\in C^3(\Delta_1(x_0,t_0))$, то выражение, справа в формуле (4) имеет частные производные первого порядка:

$$u_t(x,t)=v_t(x,t)-\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)f(\tau)h(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}f(\tau)h(s,\tau)dsd\tau \qquad (7)$$

$$u_x(x,t)=v_x(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)f(\tau)h(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}f(\tau)h(s,\tau)dsd\tau\,, \qquad (8)$$

Полученные равенства показывают, что функции $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$ являются непрерывными в $\Delta_1(x_0,t_0)$.Следовательно, правые части равенств (7), (8) в области $\Delta_1(x_0,t_0)$ имеют непрерывные частные производные второго и третьего порядков:

$$u_{tt}(x,t)=v_{tt}(x,t)-\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)h(x-t+\tau,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)f(\tau)h_x(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t f(\tau)\left[h(x+t-\tau,\tau)+h(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau\,, \qquad (9)$$

$$u_{tx}(x,t)=v_{tx}(x,t)-\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)f(\tau)h_x(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t f(\tau)\left[h(x+t-\tau,\tau)-h(x-(t-\tau),\tau)\right]d\tau\,, \qquad (10)$$

$$u_{xx}(x,t)=v_{xx}(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)f(\tau)h_x(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t f(\tau)\left[h_x(x+t-\tau,\tau)-h_x(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau\,, \qquad (11)$$

$$u_{ttx}(x,t)=v_{ttx}(x,t)-\frac{1}{4}\int_0^t f(\tau)h_x(x+t-\tau,\tau)d\tau-\frac{3}{4}\int_0^t f(\tau)h_x(x-t+\tau,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)f(\tau)h_{xx}(x-t+\tau,\tau)d\tau\,, \qquad (12)$$

$$u_{ttt}(x,t)=v_{ttt}(x,t)-f(t)h(x,t)+\frac{3}{4}\int_0^t f(\tau)h_x(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)h_{xx}(x+t-\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t(t-\tau)f(\tau)h_x(x-t+\tau,\tau)d\tau\,, \qquad (13)$$

$$u_{xxt}(x,t)=v_{xxt}(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)h_x(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)f(\tau)h_{xx}(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t f(\tau)\left[h_{xx}(x+t-\tau,\tau)+h_{xx}(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau\,, \qquad (14)$$

$$u_{xxx}(x,t)=v_{xxx}(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)f(\tau)h_{xx}(x-t+\tau,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t f(\tau)\left[h_{xx}(x+t-\tau,\tau)-h_{xx}(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau\,. \qquad (15)$$

Из формул (9)-(15) следует, что $u_{tt}(x,t),\quad u_{xt}(x,t),\quad u_{xx}(x,t)\,, u_{ttt}(x,t),\quad u_{ttx}(x,t), u_{xxt}(x,t),\quad u_{xxx}(x,t)$ являются непрерывными функциями в $\Delta_1(x_0,t_0)$, а функция $u(x,t)$ определяет классическое решение задачи (1), (2). Теорема 1 доказана.

Перейдем к исследованию обратной задачи. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть для функций $u_i(x),\ i=0,1,2,\ \ h(x,t), g(x,t)$ выполнены условия теоремы 1, $\varphi(t)\in C^3([0,t_0])$ и для функций $u_i, i=0,1,2,\ h$ выполнены условия согласования $u_0(0)=\varphi(0),\ u_1(0)=\varphi'(0),\ u_2(0)=\varphi''(0)$. Тогда, если $|h(0,t)|\ge\alpha>0,\ t\in[0,t_0]$, то для любого $T>0$ решение обратной задачи (1)-(3) на отрезке $[0,T]$ существует,

www.esa-conference.ru

единственно и принадлежит классу $C[0,T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив в формуле (13) $x=0$, воспользуемся переопределением (3). Тогда получим

$$\varphi''(t)=v_{ttt}(0,t)-f(t)h(0,t)+\frac{1}{4}\int_0^t f(\tau)[3h_x(-t+\tau,\tau)-h_x(t-\tau,\tau)]d\tau-\frac{1}{4}\int_0^t f(\tau)h_{xx}(-t+\tau,\tau)d\tau .$$

Введем обозначение

$$K(t,\tau)=\frac{1}{4h(0,t)}[3h_x(t-\tau,\tau)-h_x(-(t-\tau),\tau)-h_{xx}(t-\tau,\tau)],\quad z_1(t)=2\left[\varphi''(t)-v_{ttt}(0,t)\right]/h(0,t).$$

Тогда последнее соотношение имеет вид

$$f(t)=\int_0^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau+z_1(t). \tag{19}$$

Уравнение (19) является линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно функции $f(t)$. При выполнении условий теоремы, имеем что правая часть $f_1(t)$ и ядро $K(t,\tau)$ являются непрерывными функциями. Решение уравнения (19) имеет вид

$$f(t)=f_1(t)+\int_0^t R(t,\tau)f_1(\tau)d\tau, \tag{20}$$

где $R(t,\tau)$ – резольвента ядра $K(t,\tau)$.

Подставляя найденную функцию $f(t)$ в (6), однозначно находим функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t)=v(x,t)-\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}k(x,s,t,\tau)h(s,\tau)dsd\tau, \tag{21}$$

где

$$k(x,s,t,\tau)=(x-s+t-\tau)\left[f_1(\tau)+\int_0^\tau R(\tau,s)f_1(s)ds\right].$$

Тем самым однозначно определили функцию $f(t)$ на отрезке $[0,T]$. Подставляя найденную функцию $f(t)$ в (15) однозначно находим функцию $u(x,t)$. Теорема 2 доказана.

Получим оценки устойчивости решения обратной задачи (1) -(4).

ТЕОРЕМА 3. Пусть данные обратной задачи $u_i^1(x),\ i=0,1,2,$ $g_1(x,t)$, $\varphi_1(t)$ и $u_i^2(x),\ i=0,1,2,$ $g_2(x,t)$, $\varphi_2(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда, если $\{u_j(x,t),\ f_j(t)\},\ j=1,2$ – решения обратной задачи (1)-(4) с данными $u_i^j(x),\ i=0,1,2,$ $g_j(x,t)$, $\varphi_j(t),\ j=1,2$ соответственно, то

$$\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{C(\bar\Omega_T)}\le C\left[\|u_i^1(x)-u_i^2(x)\|_C+\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C[0,T]}\right]+C\|g_1(x,t)-g_2(x,t)\|_{C(\bar\Omega_T)}, \tag{22}$$

$$\|f_{1\varepsilon}(t)-f_{2\varepsilon}(t)\|_{C[0,T]}\le C\left[\|\varphi_1''-\varphi_2''\|_{C[0,T]}+\|v_{1ttt}(0,t)-v_{2ttt}(0,t)\|_{C[0,T]}\right], \tag{23}$$

где постоянная С не зависит от функций $u_i^j(x),\ i=0,1,2,$ $g_j(x,t)$, $\varphi_j(t),\ j=1,2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (4), следует, что

$$\|v_1(x,t)-v_2(x,t)\|_{C(\bar\Omega_T)}\le C\left[\|u_0^1-u_0^2\|_{C^1}+\|u_1^1-u_1^2\|_C+\|u_2^1-u_2^2\|_C\right]+C\|g_1(x,t)-g_2(x,t)\|_{C(\bar\Omega_T)}. \tag{24}$$

Так как

$$\|z_1^1(t)-z_1^2(t)\|_{C[0,T]}\le C\left[\|\varphi_1''(t)-\varphi_2''(t)\|_{C[0,T]}+\|v_{1ttt}(0,t)-v_{2ttt}(0,t)\|_{C[0,T]}\right],$$

то из (19) передем к норме, принимая во внимание неравенство (24). Далее, применив к полученному неравенству лемму Гроноулла-Беллмана, получим оценки (22), (23). Теорема 3 доказана.

Литература:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. -181с.
2. Аблабеков Б.С., Асанов А.Р., Курманбаева А.К. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. - Бишкек: Илим, 2011. – 156 с.
3. Аблабеков Б.С., Жороев А.К. О разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка // Евразийское Научное Объединение. 2019.Т. 1. № 5 (51), С.1-4.[
4. Аблабеков Б. С., Жороев А. К. Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка //Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 34. № 1. С. 9-18.
5. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сибирское науч. изд- во, 2009. – 457с.
6. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. -264с.
7. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный Мир, 2005. -295с.