УДК 517.95
MSC:36R11

О разрешимости граничной обратной задачи для псевдопараболического уравнения

Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, доктор физико-математических наук, профессор;
Муканбетова Айзат Темирбековна, аспирантка
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына (Кыргызская Республика, г. Бишкек)

Аннотация. *В работе исследуется вопрос о разрешимости обратной задачи нахождения граничного условия первого рода по дополнительной информации о решении прямой задачи для псевдопараболического уравнения. Уравнение рассматривается в ограниченной прямоугольной области. Условия переопределения задается во внутренней точке. Используя явное решение прямой задачи, рассматриваемая задача сводится к линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно искомой функции. В итоге доказана теорема о существовании и единственности решения исследуемой обратной задачи.*

Ключевые слова: *псевдопараболическое уравнение, обратные задачи, неизвестные граничные условия, точечное переопределение, разрешимость.*

On the solvability of a boundary inverse problem for a pseudoparabolic equation

Ablabekov B.S., Mukanbetova A.T.

Annotation. *The paper investigates the question of the solvability of the inverse problem of finding the boundary condition of the first kind from additional information about the solution of the direct problem for a pseudoparabolic equation. The equation is considered in a bounded rectangular area. The override condition is set at an interior point. Using an explicit solution to the direct problem, the problem under consideration is reduced to a linear Volterra integral equation of the second kind with respect to the desired function. As a result, a theorem on the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem under study is proved.*

Keywords: *pseudoparabolic equation, inverse problems, unknown boundary conditions, point overdetermination, solvability.*

Введение

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения коэффициентов, правых частей, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по некоторой дополнительной информации (переопределении) о решении прямой задачи [1].

Различные прямые задачи (первые и вторые начально-краевые задачи, а также краевые задачи на полупрямой для псевдопараболичесих уравнений с малым параметром изучены в работах [2-5]. Обратные задачи, в частности, граничные обратные задачи относятся к классу некорректно поставленных задач математической физики и возникают в различных областях науки и техники [6].

В работе предложен метод решения граничной обратной задачи, основанный на применении метода Фурье и аналитического решения начально-краевой задачи, полученного авторами в работе [3]. В итоге получено интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно граничной функции заданное в правом конце интервала.

Введем обозначение: $\Omega_T = \{(x,t) \mid x \in (0,\pi), t \in (0,T]\}$, $C_0^1[0,T] = \{z(t) : z(t) \in C^1[0,T],\ z(0) = 0\}$.

2. Однозначная разрешимость обратной задачи

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $\{u(x,t), f(t)\}$ для псевдопараболического уравнения:

$$u_t(x,t) = \varepsilon^2 u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T, \quad u(\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x_0,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $u_0(x), \varphi(t), h(t)$ – заданные функции, а x_0 – заданное число, $0 < x_0 < \pi$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Так как уравнение (1) содержит параметр ε, то решение обратной задачи (1) -(5) зависит от этого параметра. Поэтому в дальнейшем решение обратной задачи обозначим через $u_\varepsilon(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ соответственно.

Определение. Пара функций $u_\varepsilon(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ называется решением обратной задачи (1) –(4), если $u_\varepsilon(x,t)\in C^{(2,1)}(\Omega_T)\cap C(\bar{\Omega}_T)$ $f_\varepsilon(t)\in C_0^1[0,T]$ и удовлетворяет равенствам (1) -(4) в классическом смысле.

Теорема 1. Пусть $u_0(x)\in C^{(3)}([0,\pi])$, $\varphi(t)\in C^1([0,T])$, $h(t)\in C^1([0,T])$ и выполнены условия согласования $u_0(0)=\varphi(0)=0$, $u_0(\pi)=0$, $u_0''(0)=0$, $u_0''(\pi)=0$, $u_0(x_0)=h(0)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует единственное решение обратной задачи (1) -(4).

Доказательство. Пусть функции $u_\varepsilon(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ являются решением обратной задачи (1)-(4). Так как обратная задача (1)-(4) линейна, то ее решение можно представить в виде [1]:

$$(u_\varepsilon(x,t),\ f_\varepsilon(t))=(v_\varepsilon(x,t),0)+(w_\varepsilon(x,t),\ f_\varepsilon(t)), \tag{5}$$

где $v_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$v_{\varepsilon t}(x,t)=\varepsilon^2 v_{\varepsilon xxt}(x,t)+v_{\varepsilon xx}(x,t), \tag{6}$$

$$v_\varepsilon(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le\pi, \tag{7}$$

$$v_\varepsilon(0,t)=\varphi(t),\quad 0\le t\le T,\quad v_\varepsilon(\pi,t)=0,\quad 0\le t\le T, \tag{8}$$

Пара функций $(w_\varepsilon(x,t),\ f_\varepsilon(t))$ удовлетворяет задаче

$$w_{\varepsilon t}(x,t)=\varepsilon^2 w_{\varepsilon xxt}(x,t)+w_{\varepsilon xx}(x,t), \tag{9}$$

$$w_\varepsilon(x,0)=0,\quad 0\le x\le\pi, \tag{10}$$

$$w_\varepsilon(0,t)=0,\quad 0\le t\le T,\quad w_\varepsilon(\pi,t)=f_\varepsilon(t),\quad 0\le t\le T, \tag{11}$$

$$w_\varepsilon(x_0,t)=h(t)-v_\varepsilon(x_0,t),\quad 0\le t\le T. \tag{12}$$

В условиях теоремы 1, классическое решение задачи (6)-(8) существует, единственно [3] и дается формулой

$$v_\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}t\right)\right)u_{0n}\sin(nx)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(1+(\varepsilon n)^2)n}\varphi(t)\sin(nx)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n)}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon\pi)^2}(t-\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau\sin(nx), \tag{13}$$

где

$$u_{0n}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0(x)\sin nx dx.$$

Сведем исходную задачу (1)-(3) к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. С этой целью решим прямую задачу (9)-(11), предположив функцию $f_\varepsilon(t)$ известной. Решение задачи (9)-(11) можно представить в виде

$$w_\varepsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n f_\varepsilon(t)}{(1+(\varepsilon n)^2)n}\sin(nx)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)\right)(-1)^n f_\varepsilon(\tau)d\tau\sin(nx).$$

Тогда, согласно формуле (5), имеем

$$u_\varepsilon(x,t)=v_\varepsilon(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n f_\varepsilon(t)}{(1+(\varepsilon n)^2)n}\sin(nx)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)\right)(-1)^n f_\varepsilon(\tau)d\tau\sin(nx). \tag{14}$$

Положим в формуле (14) $x=x_0$ и воспользуемся информацией (10). Поменяв местами операции интегрирования и суммирования, получим

$$\tilde{f}_\varepsilon(t)-\frac{1}{L}\int_0^t K_\varepsilon(t,\tau)\tilde{f}_\varepsilon(\tau)d\tau=\frac{1}{L}F_\varepsilon(t), \tag{15}$$

с ядром

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(1+(n\varepsilon)^2)n}\sin nx_0,\quad K_\varepsilon(t,\tau)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n e^{-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)}}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\sin nx_0 \tag{16}$$

и правой частью

$F_\varepsilon(t)=h(t)-v_\varepsilon(x_0,t).$

Покажем, что функции $K_\varepsilon(t,\tau)$, $F_\varepsilon(t)$ являются непрерывными функциями.

Очевидно, что непрерывность функции $F_\varepsilon(t)$ следует из непрерывности функций $v_\varepsilon(x_0,t)$, $h(t)$.

Так как

$$|K_\varepsilon(t,\tau)|\le\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|(-1)^n n\right|e^{-\frac{n^2}{1+(\varepsilon n)^2}(t-\tau)}}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\le\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+(\varepsilon n)^2)^2}\le\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^4 n^3},$$

то отсюда следует, что ряд (16) сходится, следовательно, функция $K_\varepsilon(t,\tau)$ является непрерывной функцией. Поэтому уравнение (15) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, следовательно уравнение (15) имеет единственное решение $f_{\varepsilon}(t)\in C([0,T])$. Теорема1 доказана.

Теорема 2. Пусть функции $(u_{1\varepsilon}, f_{1\varepsilon})$ и $(u_{2\varepsilon}, f_{2\varepsilon})$ - любые две пары функций, удовлетворяющие условиям обратной задачи (1)-(4), а $u_0^1(x)$, $u_0^2(x)$, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ отвечающие им данные обратной задачи. Тогда для любого конечного T>0 существует такая постоянная $C=C(\varepsilon,T)$, что имеют место оценки

$$\|f_{1\varepsilon}(t)-f_{2\varepsilon}(t)\|_{C([0,T])}\le C(\varepsilon,T)\left[\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C([0,T])}+\|h_1(t)-h_2(t)\|_{C([0,T])}\right]+C(\varepsilon,T)\|u_{01}(x)-u_{02}(x)\|_{C[0,\pi]}, \quad (17)$$

$$\|u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon}\|_{C(\bar{\Omega}_T)}\le C(\varepsilon,T)\left[\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C([0,T])}+\|h_1(t)-h_2(t)\|_{C([0,T])}\right]+C(\varepsilon,T)\|u_{01}(x)-u_{02}(x)\|_{C[0,\pi]}\quad . \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $f_{1\varepsilon}(t)$ и $f_{2\varepsilon}(t)$ - два решения обратной задачи (1)-(4). Обозначим разность двух функций через $\tilde{f}_{\varepsilon}(t)$, т.е. $\tilde{f}_{\varepsilon}(t)=f_{1\varepsilon}(t)-f_{2\varepsilon}(t)$. Тогда из уравнения (15) нетрудно получить следующее уравнение:

$$\tilde{f}_{\varepsilon}(t)-\frac{1}{L}\int_0^t K_{\varepsilon}(t,\tau)\tilde{f}_{\varepsilon}(\tau)d\tau=\frac{1}{L}\Big[\big(h_1(t)-h_2(t)\big)-\big(v_{0\varepsilon}^1(x,t)-v_{0\varepsilon}^2(x,t)\big)\Big], \quad (19)$$

Из (19) имеем

$$\|\tilde{f}_{\varepsilon}(t)\|_{C[0,T]}+\frac{1}{L}\int_0^t\|K_{\varepsilon}(t,\tau)\|_C\|\tilde{f}_{\varepsilon}(\tau)\|_{C[0,T]}d\tau\le\frac{1}{L}\Big[\|h_1(t)-h_2(t)\|_{C[0,T]}+\|v_{0\varepsilon}^1(x_0,t)-v_{0\varepsilon}^2(x_0,t)\|_{C[0,T]}\Big].$$

Так как

$$\|v_{0\varepsilon}^1(x,t)-v_{0\varepsilon}^2(x,t)\|_{C(\bar{\Omega}_T)}\le C(\varepsilon,T)\Big[\|u_{01}(x)-u_{02}(x)\|_{C[0,\pi]}+\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C[0,T]}\Big],$$

то из последнего неравенства в силу леммы Гронуолла-Беллмана, получим оценку (17). Непосредственно оценивая уравнения (14) и учитывая оценку (17) получим оценку (18). Теорема 2 доказана.

Литература:

1. Аблабеков Б.С Обратные задачи для псевдопараболичесих уравнений. -Бишкек: Илим 2001. –183 с.
2. Аблабеков Б.С., Курманбаева А.К. Решение некоторых начальных и краевых задач для уравнения жидкости в трещиновато-пористой среде // Известия КГТУ им. И.Раззакова, №22, Бишкек 2011. – С.235– 239.
3. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т.О разрешимости решений первой начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Евразийское научное объединение. –2019.Т.1. – №4(50). –С.1 –5.
4. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. –№3. С.41-47.
5. Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. Краевая задача на полупрямой для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 32. № 3. С. 29-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1986. – 178с.