ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Расчет плит. Волновое решение уравнения Софи-Жермен

Шаркин Вадим Михаилович, кандидат технических наук

В теории упругости выводится дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки, которое выражает зависимость между прогибом и нагрузкой – уравнение Софи-Жермен:

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)=q \qquad (1)$$

Здесь D – жесткость пластинки:

$$D=\frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^3}{12};$$

E – модуль упругости I-го рода;

ν - коэффициент Пуассона;

h – толщина пластинки;

q – распределенная вертикальная нагрузка на заданном участке поверхности.

W(x,y) – функция прогиба.

При этом выполняются следующие зависимости:

$$\left.\begin{aligned} M_1&=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\\ M_2&=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь M_1 и M_2 – функции изгибающих моментов в плоскостях, параллельных x и y соответственно.

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}=-q \qquad (3)$$

Здесь Q_1 и Q_2 – функции поперечных сил в плоскостях, параллельных x и y соответственно.

$$\frac{\partial M_2}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}=Q_2, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}=Q_1 \qquad (5)$$

Здесь H – функция крутящих моментов, для которой справедлива зависимость:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}=-D(1-\nu)\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2} \qquad (6)$$

Выводы зависимостей опускаются.

В дальнейшем рассматривается уравнение (1).

Вводятся функции f_1 и f_2:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=f_1;\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=f_2 \qquad (7)$$

Подстановка (7) в (1) приводит к выражениям:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}=\dfrac{q}{D}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}=\dfrac{q}{D}\end{cases} \qquad (8)$$

Отсюда:

$$2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}=2\frac{q}{D} \qquad (9)$$

После сокращения общего множителя и группировки членов:

$$\frac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial y^2}=\frac{q}{D}; \qquad (10)$$

Принимаются обозначения:

$$\frac{\partial(f_1+f_2)}{\partial x}=R_1;\ \frac{\partial(f_1+f_2)}{\partial y}=R_2; \qquad (11)$$

После подстановки (11) в (10):

$$\frac{\partial R_1}{\partial x}+\frac{\partial R_2}{\partial y}=\frac{q}{D}; \qquad (12)$$

После взятия частных производных от уравнений (11) имеем:

$$\frac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial R_1}{\partial y};\ \frac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial R_2}{\partial x}, \qquad (13)$$

откуда следует:

$$\frac{\partial R_2}{\partial x}-\frac{\partial R_1}{\partial y}=0; \qquad (14)$$

Выражения (12) и (14) записываются как система:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R_1}{\partial x}+\dfrac{\partial R_2}{\partial y}=\dfrac{q}{D};\\[2ex] \dfrac{\partial R_2}{\partial x}-\dfrac{\partial R_1}{\partial y}=0.\end{cases} \qquad (15)$$

(15) переписывается в матричной форме:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}R_1\\R_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}R_1\\R_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{q}{D}\\0\end{bmatrix} \qquad (16)$$

В выражении (16) матрица имеет собственные числа и собственные векторы:

$$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\end{bmatrix}=0; \qquad (17)$$

откуда:

$$\begin{bmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\end{bmatrix}=0; \qquad (18)$$

$$\lambda^2+1=0$$

$$\lambda_{1;2}=\pm\sqrt{-1}(\pm i) \qquad (19)$$

Первый собственный вектор:

$$\begin{cases}-iS_{11}+S_{12}=0\\-iS_{11}-S_{12}=0\end{cases}.\ \begin{matrix}S_{11}=1\\S_{12}=+i\end{matrix}$$

-1 -i²=>-1=i²=>i=$\sqrt{-1}$

Второй собственный вектор:

$$\begin{cases}iS_{21}+S_{22}=0\\-S_{21}+iS_{22}=0\end{cases}.\ \begin{matrix}S_{21}=1 & S_{22}=-i\\S_{21}=1 & S_{22}=-i\end{matrix}$$

-1 $-i^2=0 \Rightarrow -1=i^2=i^2 \Rightarrow i=\sqrt{-1}$

Определитель, составленный из собственных векторов не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ +i & -i \end{vmatrix} = -i-i \neq 0$$

Расчетный вектор и свободный вектор B (16) представляются в виде линейной комбинации собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = K_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + K_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad (20)$$

$$\begin{cases} R_1 = K_1 + K_2 \\ R_2 = iK_1 - iK_2 \end{cases}; \; K_1 = \frac{1}{2}\left(R_1 + \frac{1}{i}R_2\right) \qquad (21)$$

$$iR_1 - R_2 = 2iK_2; \; K_2 = \frac{1}{2}\left(R_1 - \frac{1}{i}R_2\right) \qquad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{q}{D} \\ o \end{pmatrix} = n_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + n_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{q}{D} = n_1 + n_2 \\ O = in_1 - in_2 \end{cases} \qquad (24)$$

$$n_1 = n_2 = \frac{q}{2D}$$

Подстановка (19) и (22) в (16) с учетом (17) приводит к выражениям:

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial x} + i\frac{\partial K_1}{\partial y} - \frac{q}{2D}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial K_2}{\partial x} - i\frac{\partial K_{21}}{\partial y} - \frac{q}{2D}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0 \qquad (25)$$

Отсюда следует, т.к. собственные векторы независимы:

$$\begin{cases} \frac{\partial K_1}{\partial x} + i\frac{\partial K_1}{\partial y} = \frac{q}{2D} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - i\frac{\partial K_2}{\partial y} = \frac{q}{2D} \end{cases} \qquad (26)$$

При учете (21) и (22):

$$\begin{cases} \frac{\partial (R_1 + \frac{1}{i}R_2)}{\partial x} + \frac{\partial (iR_1 + R_2)}{\partial y} = \frac{q}{D} \\ \frac{\partial (R_1 - \frac{1}{i}R_2)}{\partial x} - \frac{\partial (iR_1 - R_2)}{\partial y} = \frac{q}{D} \end{cases} \qquad (27)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \frac{\partial (iR_1 + R_2)}{\partial y} + \frac{1}{i}\frac{\partial (iR_1 + R_2)}{\partial x} = \frac{q}{0} \\ \frac{\partial (iR_1 - R_2)}{\partial y} - \frac{1}{i}\frac{\partial (iR_1 - R_2)}{\partial x} = -\frac{q}{D} \end{cases} \qquad (28)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial (iR_1 + R_2)}{\partial x} + i\frac{\partial (iR_1 + R_2)}{\partial y} = i\frac{q}{D} \\ \frac{\partial (iR_1 - R_2)}{\partial x} - i\frac{\partial (iR_1 - R_2)}{\partial y} = i\frac{q}{D} \end{cases} \qquad (29)$$

Будем считать функцию q функцией комплексного переменного:

$$q = q_1 + iq_2 \qquad (30)$$

(в частном случае $q_1=0$)

Для того, чтобы функция комплексного переменного была дифференцируема в точках расчетного пространства по условию Коши-Римана

(Д'Аламбера-Эйлера) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{\partial q_2}{\partial y}; \; \frac{\partial q_1}{\partial y} = \frac{-\partial q_2}{\partial x} \qquad (31)$$

Тогда из первого уравнения (29) следует:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 (iR_1 + R_2)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (iR_1 + R_2)}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 (iR_1 + R_2)}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 (iR_1 + R_2)}{\partial x \partial y}; \end{cases} \qquad (32)$$

Из первого уравнения (32) следует:

$$\frac{\partial^2 (iR_1 + R_2)}{\partial y \partial x} = 0; \qquad (33)$$

Отсюда:

$$\frac{\partial (iR_1 + R_2)}{\partial x} = a(x)$$

или

$$\frac{\partial (iR_1 + R_2)}{\partial y} = \mathrm{b(y)}$$

тогда:

$$\begin{cases} iR_1 + R_2 = \int a(x)dx + c_1; \\ iR_1 + R_2 = \int b(y)dy + c_2; \end{cases} \qquad (34)$$

Из выражений (34) следует, что функция iR_1+R_2 представляется в виде суммы суммы функций, одна из которых зависит только от x, а друга от y:

$$iR_1 + R_2 = X + Y = \Theta \qquad (35)$$

Тогда первое уравнение из (32)имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 \qquad (36)$$

Вводятся функции:

$$\Theta_1 = \frac{\partial \Theta}{\partial x}; \; \Theta_2 = \frac{\partial \Theta}{\partial y} \qquad (37)$$

отсюда:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial y} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} \qquad (38)$$

Из (36); (37)и (38):

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - \frac{\partial \Theta_2}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (39)$$

Уравнения (39)представляются в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{pmatrix}=0. \qquad (40)$$

Собственные числа матрицы:

$$\beta^2-1^2=0$$

$$\beta=\pm\sqrt{1}=\frac{dy}{dx} \qquad (41)$$

По аналогии с (20)-(26)можно записать:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(\Theta_1+\Theta_2)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\Theta_1+\Theta_2)}{\partial y}=0;\\[2mm] \dfrac{\partial(\Theta_1-\Theta_2)}{\partial x}-\dfrac{\partial(\Theta_1-\Theta_2)}{\partial y}=0.\end{cases} \qquad (42)$$

Ниже приводим графическую иллюстрацию условий (42):

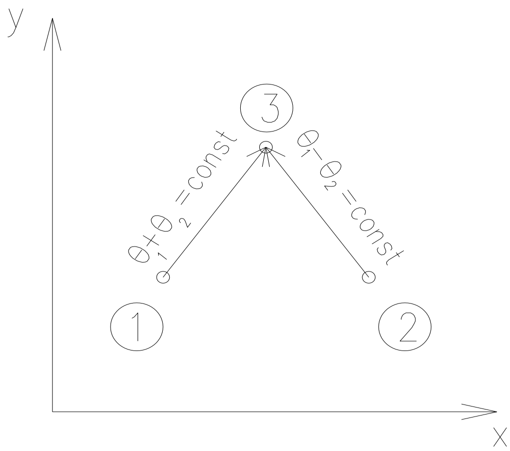

Рис.1

$\Theta_1+\Theta_2$ - константа на всех прямых с тангенсом угла $\dfrac{dy}{dx}=+1$

$\Theta_1-\Theta_2$ - константа на прямых при $\dfrac{dy}{dx}=-1$

Из (37) следует:

$$\begin{cases}\Theta_1+\Theta_2=\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}+\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}\\[2mm] \Theta_1-\Theta_2=\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}-\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}\end{cases} \qquad (43)$$

Отсюда:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}+\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}=\text{const при}\dfrac{dy}{\partial x}=1\\[2mm] \dfrac{\partial\Theta}{\partial x}-\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}=\text{const при}\dfrac{dy}{\partial x}=-1\end{cases} \qquad (44)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial y\partial x}=\text{const при}1\\[2mm] \dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial y^2}=\text{const при}1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial y\partial x}=\text{const }-1\\[2mm] \dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial y^2}=\text{const }-1\end{cases}$$

Из уравнений (44) и (35) следует, что если действительная и мнимая часть числа в сумме (или разности) константы по направлениям, то те же самые действительная и мнимая части числа по отдельности константы по этим направлениям. Тогда с учетом равенств (11) следует:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial y\partial x}=\text{const при}\dfrac{dy}{\partial x}=1\\[2mm] \dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial y^2}=\text{const при}\dfrac{dy}{\partial x}=1\end{cases} \qquad (45)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial y\partial x}=\text{const при}\dfrac{dy}{\partial x}=-1\\[2mm] \dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2(f_1+f_2)}{\partial y^2}=\text{const при}\dfrac{dy}{\partial x}=-1\end{cases} \qquad (46)$$

Но из уравнений (7) следует:

$$(f_1+f_2)=\frac{\partial^2 W}{dx^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \qquad (47)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}=\begin{matrix}const\\ \oplus\end{matrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\frac{\partial^4 W}{\partial^2 y\partial^2 x}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=\begin{matrix}const\\ \oplus\end{matrix}$$

Из (47) и (45) следует:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial^3 W}{\partial y^3}=const\quad \text{при}\ \dfrac{dy}{dx}=1\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^4 W}{\partial y^2\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial^3 W}{\partial y^3}+\dfrac{\partial^4 W}{\partial y^4}=const\quad \text{при}\ \dfrac{dy}{dx}=1\end{cases}$$

(48)

Из (47) и (45) следует аналогично:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^4 W}{\partial x^4}-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial^3 W}{\partial y^3}=const\quad \text{при}\ \dfrac{dy}{dx}=-1\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^3}-\dfrac{\partial^4 W}{\partial y^2\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial^3 W}{\partial y^3}-\dfrac{\partial^4 W}{\partial y^4}=const\quad \text{при}\ \dfrac{dy}{dx}=-1\end{cases}$$

(49)

В системе уравнений (48) после вычитания уравнений имеем:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=const\quad \text{при}\ \frac{dy}{dx}=1 \qquad (50)$$

Аналогично из (49) после сложения уравнений:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=const\quad \text{при}\ \frac{dy}{dx}=-1 \qquad (51)$$

Полученные уравнения (50) и (51) могут решаться совместно с уравнением(1):

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = \dfrac{q}{2D} + const \quad при \ \dfrac{dy}{dx} = 1; \\ \dfrac{\partial^4 W}{\partial y} + \dfrac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = \dfrac{q}{2D} - const \quad при \ \dfrac{dy}{dx} = +1. \end{cases} \quad (52)$$

Сложение уравнений (46) приводит к выражению:

$$\frac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial y^2} = const \quad при \ \frac{dy}{dx} = -1 \quad (53)$$

Рассмотрим выражение:

$$\frac{\partial (f_1 + f_2)}{\partial x} - \frac{\partial (f_1 + f_2)}{\partial y} = \Phi; \quad (54)$$

Тогда из (53) и (54):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \quad (55)$$

Уравнение (55) решается аналогично решению уравнения (36). Решение находится в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0; \end{cases} \quad (56)$$

Здесь: $\Phi_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$; $\Phi_2 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$;

Тогда: $$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = const \quad при \ \dfrac{dy}{dx} = 1; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = const \quad при \ \dfrac{dy}{dx} = -1; \end{cases} \quad (57)$$

Из (2) и (7) следует:

$$f_1 + f_2 = -\frac{1}{(1+\upsilon)D}(M_1 + M_2) \quad (58)$$

или:

$$f_1 + f_2 = B(M_1 + M_2) \quad (B = -\frac{1}{(1+\upsilon)D}) \quad (59)$$

Из (54):

$$\Phi = B\left[\frac{\partial (M_1 + M_2)}{\partial x} - \frac{\partial (M_1 + M_2)}{\partial y}\right] \quad (60)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = B\left[\frac{\partial^2 (M_1 + M_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (M_1 + M_2)}{\partial x \partial y}\right] \quad (61)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = B\left[\frac{\partial^2 (M_1 + M_2)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 (M_1 + M_2)}{\partial y^2}\right] \quad (62)$$

Уравнения (46) и (10) объединяются в систему из 3-х ур-ний, которые будут решаться попарно:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial y^2} = \dfrac{q}{D}; \\ \dfrac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial y^2} = \Im_1; \\ \dfrac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial y^2} = \Im_2. \end{cases} \quad (63)$$

Здесь:

$$\Im_1 = \Im_1(x - y); \quad x - y = Z_1;$$

$$\frac{\partial \Im_1}{\partial x} + \frac{\partial \Im_1}{\partial y} = \frac{\partial \Im_1}{\partial Z_1} - \frac{\partial \Im_1}{\partial Z_1} = 0; \quad (64)$$

$$\Im_2 = \Im_2(x + y); \quad x + y = Z_2;$$

$$\frac{\partial \Im_2}{\partial x} - \frac{\partial \Im_2}{\partial y} = \frac{\partial \Im_2}{\partial Z_2} - \frac{\partial \Im_2}{\partial Z_2} = 0; \quad (65)$$

Сумма первого и второго уравнений (63) дает выражение:

$$2\frac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial x^2} = \frac{q}{D} + \Im_1 \quad (66)$$

Последнее уравнение интегрируется для случая постоянной нагрузки q:

$$\frac{\partial (f_1 + f_2)}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{q}{D}x + C_1 + \int \Im_1 dx$$

$$\int \Im_1 dx = \int \Im_1 (x - y) dx;$$

$$\frac{d(x-y)}{\partial x} = \frac{dZ_1}{dx} = 1; \quad dZ_1 = dx$$

$$\int \Im_1 dx = \int \Im_1 dZ_1$$

$$\int\int \Im_1 dx^2 = \int\int \Im_1 dZ_1^2 = I_1(x + y) \quad (67)$$

Отсюда и из (66):

$$(f_1 + f_2) = \frac{1}{2}\frac{q}{D}\frac{x^2}{2} + C_1 X + C_2 + I_1, \quad (68)$$

Где I_1 обладает свойством (64).

Разность 1-го и 2-го уравнений (63) дает выражение:

$$2\frac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial y^2} = +\frac{q}{D} + \Im_1 \quad (69)$$

$$\int \Im_1 dy^2 = \int \Im_1 (x - y) dy$$

$$\frac{d(x-y)}{dy} = \frac{dZ_1}{dy} = -1; \quad dZ_1 = -dy$$

$$\int \Im_1 dy = -\int \Im_1 dZ_1$$

Тогда по аналогии:

$$f_1 + f_2 = \frac{1}{2}\frac{q}{D}\frac{y^2}{2} + e1y + e2 - I1 \quad (70)$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Уравнения (68) и (70)совместимы при следующих условиях:

$$C_2=\frac{1}{4}\frac{q}{D}y^2;\quad e2=\frac{1}{4}\frac{q}{D}x^2; \qquad (71)$$

$C_1x+I_1=e1y$ - I1 (72)

т.е.

$2I_1=e1y-C_1x$; (73)

т.к.

$\frac{\partial I_1}{\partial x}+\frac{\partial I_1}{\partial y}=0,$ то из (73):

$-C_1+e1=0$,

тогда:

$C_1=e1=\xi_1$, (74)

отсюда и из 72:

$$\xi_1 y-\xi_1 x=2I_1;\quad I_1=\frac{\xi_1}{2}(y-x)$$

$$e_1x+I_1=C_1x+\frac{C_1}{2}y-\frac{C_1}{2}x=\frac{\xi_1}{2}(x+y)=const$$

$при\ \frac{dy}{dx}=-1$ (75)

$e_1y-I_1=e$

$${}_1y-\frac{e_1}{2}y+\frac{e_1}{2}x=\frac{q_1}{2}(y+x)=const$$

$при\ \frac{dy}{dx}=-1$ (76)

Для искомой функции имеем решение:

$$f_1+f_2=\frac{1}{4}\frac{q}{D}(x^2+y^2)+F_1 \qquad (77)$$

где F_1: $F_1=F_1(x+y)$;

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=0 \qquad (78)$$

Из 1го и 3го уравнения (63) также получим:

$$f_1+f_2=\frac{1}{4}\frac{q}{D}(x^2+y^2)+F_2 \qquad (79)$$

где F_2: $F_2=F_2(x-y)$;

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}=0 \qquad (80)$$

Решения (77) и (79) являются частными решениями на своих направлениях и должны суммироваться:

$$\boxed{f_1+f_2=\frac{1}{2}\frac{q}{D}(x^2+y^2)+F_1+F_2} \qquad (81)$$

При этом из (2) и (7) следует:

$$f_1+f_2=-\frac{1}{(\upsilon+1)D}(M_1+M_2) \qquad (82)$$

Тогда:

$$\boxed{M_1+M_2=-(1+\upsilon)\frac{q}{2}(x^2+y^2)+F_1+F_2} \qquad (83)$$

Для подтверждения физичности уравнения (83) рассматривается пример однопролетной шарнирной балки с распределенной нагрузкой.

Для нее из уравнения (2) следует:

$$M_1=-D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2};\quad M_2=0;\quad y=0;$$ и (83)

представляется в виде:

$$M=-\frac{qx^2}{2}+ax+b$$

при x=0: M=0; b=0

при x=l: M=0; тогда:

$$-\frac{ql^2}{2}+al=0$$

$$a=\frac{ql}{2}$$

при x=l/2:

$$M=-\frac{ql^2}{8}+\frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{2}=\frac{ql^2}{8}$$

Таким образом, в частном случае решение уравнения (83) совпадает с известным решением задачи сопротивления материалов.

Далее, с учетом уравнений (75) и (76) записывается развернутая форма уравнения (83):

$$\boxed{M_1+M_2=-(1+\upsilon)\frac{q}{2}(x^2+y^2)+Ax+By+I_1+I_2} \qquad (84)$$