www.esa-conference.ru

Поверхности Клиффорда в гиперболическом пространстве положительной кривизны

Ромакина Людмила Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Саратовский государственный университет (г. Саратов)

Исследованы аналоги поверхности Клиффорда в гиперболическом пространстве $\widehat{H}^3$ положительной кривизны. Доказано, что они проективно эквивалентны овальным поверхностям и образуют два типа. Параллелей Клиффорда, отличных от поляры исходной прямой, в пространстве $\widehat{H}^3$ не существует.

1. Введение. В проективной модели гиперболическое пространство $\widehat{H}^3$ положительной кривизны реализуется на идеальной области пространства Лобачевского Λ^3, т.е. на внешней относительно овальной поверхности γ, называемой *абсолютом* пространства $\widehat{H}^3$, области проективного пространства P^3[1]. Типы прямых, плоскостей и двугранных углов пространства $\widehat{H}^3$ описаны в работах [1–3], основы геометрии коевклидовой плоскости и гиперболической плоскости положительной кривизны, подмногообразий пространства $\widehat{H}^3$, представлены в [4–6] и других работах автора.

Поверхностью Клиффорда называют [7, 8] множество всех точек эллиптического пространства, расстояние от которых до заданной прямой *a*, называемой *осью*, равно данному числу r, где $r \in (0, \pi\rho/2)$, ρ – радиус кривизны пространства. В эллиптическом пространстве поверхность Клиффорда проективно эквивалентна кольцевой поверхности (см. классификацию поверхностей второго порядка, например, в [9, 10]) и содержит два семейства прямолинейных образующих. В связи с этим через каждую точку эллиптического пространства проходят точно две прямые, состоящие из точек, равноудаленных от заданной прямой. Такие прямые называют *параллелями Клиффорда*. В данной работе исследованы аналоги поверхностей Клиффорда в пространстве $\widehat{H}^3$. Доказано, что такие поверхности проективно эквивалентны овальным поверхностям, следовательно не содержат прямолинейных образующих. Этот факт дает отрицательный ответ на вопрос о существовании в пространстве $\widehat{H}^3$ параллелей Клиффорда, отличных от поляры заданной прямой относительно абсолюта, которая состоит из точек, удаленных от заданной прямой на половину длины прямой, эллиптической или гиперболической.

Напомним, что в пространстве $\widehat{H}^3$ существуют прямые трех типов: эллиптические, пересекающие абсолют в мнимо сопряженных точках; гиперболические, имеющие две общие вещественные точки с абсолютом; параболические, касательные к абсолюту.

Прямую *a* в определении поверхности Клиффорда, а также ее поляру b относительно абсолюта, будем называть *осью*, *эллиптической* или *гиперболической* в зависимости от типа прямой.

Пара элементов, состоящая из точки и непараболической прямой, не содержащей данную точку, имеет инвариант фундаментальной группы G пространства $\widehat{H}^3$. Геометрически этот инвариант имеет тот же смысл, что и в евклидовой геометрии. Он равен расстоянию от точки до ее ортогональной проекции на данную прямую. В случае пары элементов, состоящей из точки и параболической прямой, такого инварианта не существует. Поэтому, исследуя в пространстве $\widehat{H}^3$ поверхности Клиффорда и пользуясь их классическим определением, будем рассматривать поверхности только с эллиптической и гиперболической осью.

Типы ненулевых расстояний между точками, следовательно, и ненулевых расстояний от точки до непараболической прямой в пространстве $\widehat{H}^3$ могут быть двух типов, эллиптического и параболического.

Поверхность Клиффорда назовем *эллиптической* (*гиперболической*), если тип измерения ее радиуса r является эллиптическим (гиперболическим). В зависимости от радиуса определим тип реализации поверхности Клиффорда в пространстве $\widehat{H}^3$ и докажем, что оси поверхности Клиффорда любого типа являются ее осями вращения.

Предварительно введем следующие определения.

В пространстве $\widehat{H}^3$ собственную поверхность второго порядка, проективно эквивалентную овальной поверхности, касающуюся абсолюта в двух точках и имеющую в этих точках общие касательные плоскости с абсолютом, назовем *бипараболоидом*. Бипараболоид назовем *эллиптическим* (*гиперболическим*), если абсолют пространства $\widehat{H}^3$ расположен во внешней (внутренней) относительно него области.

2. Основные метрические формулы. Все вычисления в пространстве $\widehat{H}^3$ проводим в каноническом репере $R^* = \{A_1, A_2, A_3, A_4, E\}$ первого типа, вершины которого попарно сопряжены относительно абсолюта, вершина A_4 является внутренней по отношению к абсолюту, а единичная точка E лежит в пересечении трех коевклидовых плоскостей, каждая из которых содержит одну их координатных прямых A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3.

Уравнение абсолютной овальной поверхности γ в репере R^* имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0. \quad (1)$$

Если точки A и B эллиптической или гиперболической прямой пространства $\widehat{H}^3$ заданы в репере R^* координатами (a_p) и (b_p), $p = 1, 2, 3, 4$, то расстояние между ними может быть выражено по формуле

$$cos\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2}}, \quad (2)$$

$$cosh\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2}}. \quad (3)$$

Для координат (t_p), $p = 1, 2, 3, 4$, эллиптической (гиперболической) плоскости пространства выполняется условие

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$t_1^2+t_2^2+t_3^2-t_4^2<0\ (t_1^2+t_2^2+t_3^2-t_4^2>0).\ (4)$$

3. Поверхности Клиффорда с эллиптической осью. Пусть в пространстве $\widehat{H}^3$ ω_e (ω_h) – эллиптическая (гиперболическая) поверхность Клиффорда с эллиптической осью a, т.е. множество всех точек из $\widehat{H}^3$, эллиптическое (или гиперболическое) расстояние от которых до заданной эллиптической прямой a равно r. В случае эллиптической поверхности Клиффорда условимся, что $r\in(0,\pi\rho/2)$. В гиперболическом случае наряду с вещественными положительными будем допускать и комплексные значения r вида $\rho(i\pi/2-r_0)$, где $r_0\in R_+$, полагая, что точки искомой поверхности могут принадлежать пространству Лобачевского Λ^3.

Не теряя общности рассуждений, эллиптическую ось a поверхности ω_e (ω_h) совместим с эллиптической прямой A_1A_2 репера R^*, а текущую точку M поверхности зададим в этом репере координатами $(m_p), p=1,2,3,4$. Тогда уравнение плоскости MA_1A_2 будет иметь вид $m_4x_3-m_3x_4=0$. Плоскость MA_1A_2 пересекает абсолют γ с уравнением (1) по линии второго порядка, заданной в репере R^* уравнением

$$x_1^2+x_2^2+x_4^2\left(\frac{m_3^2}{m_4^2}-1\right)=0.\ (5)$$

Полюс P прямой A_1A_2 в плоскости MA_1A_2 относительно линии (5) имеет координаты $(0:0:m_3:m_4)$, а точка M_{12}, ортогональная проекция точки M на прямую A_1A_2 в плоскости MA_1A_2, задана координатами $(m_1:m_2:0:0)$.

Выражая по формулам (2) и (3) расстояние r между точками M и M_{12}, получим уравнения поверхностей ω_e и ω_h в репере R^*:

$$\omega_e: x_1^2+x_2^2-\cot^2\frac{r}{\rho}x_3^2+\cot^2\frac{r}{\rho}x_4^2=0,\ (6)$$
$$\omega_h: x_1^2+x_2^2+\coth^2\frac{r}{\rho}x_3^2-\coth^2\frac{r}{\rho}x_4^2=0.\ (7)$$

Исследуем поверхности ω_e и ω_h по уравнениям (6) и (7) соответственно. При допустимых значениях параметра r квадратичные формы в левых частях уравнений (6) и (7) имеют ранг 4 и сигнатуру 2. Следовательно, ω_e и ω_h являются овальными поверхностями (см. [9, 10]). Как овальные поверхности ω_e и ω_h не имеют прямолинейных образующих. Это означает, что для эллиптической прямой пространства $\widehat{H}^3$, в отличие от каждой прямой эллиптического пространства, параллелей Клиффорда, отличных от поляры данной прямой относительно абсолюта, не существует.

Решая системы уравнений (1), (6) и (1), (7), находим общие точки поверхностей ω_e и ω_h с абсолютом: $E_{34}(0:0:1:1)$, $E_{43}(0:0:1:-1)$. В этих точках поверхности ω_e и ω_h касаются друг друга и абсолютной поверхности γ и имеют в этих точках общие с абсолютом касательные коевклидовы плоскости k_{34}, k_{43}. Согласно определению поверхности ω_e, ω_h принадлежат различным углам между плоскостями k_{34} и k_{43}. Докажем этот факт аналитически, используя уравнения (6), (7).

Гиперболическая плоскость $A_1A_2A_4$, заданная в репере R^* уравнением $x_3=0$, не имеет с поверхностью ω_e (6) общих вещественных точек. Следовательно, ω_e полностью принадлежит углу между плоскостями k_{34} и k_{43}, не содержащему абсолют. Такой угол назван двугранной валианой между плоскостями k_{34} и k_{43} [3, 11]. Поверхность ω_h полностью принадлежит двугранной ковалиане между плоскостями k_{34} и k_{43}, т.е. углу между k_{34} и k_{43}, содержащему абсолют.

Точки E_{34}, E_{43} лежат на прямой A_3A_4, полярной к эллиптической оси a поверхности относительно абсолюта. Назовем эту прямую *гиперболической осью* поверхности Клиффорда и обозначим b.

Заметим, что в эллиптическом (гиперболическом) случае при $r=\pi\rho/2$ $(r=i\pi\rho/2)$ поверхность ω_e (ω_h) вырождается в пару мнимо сопряженных плоскостей, заданную уравнением $x_1^2+x_2^2=0$. Все вещественные точки этой поверхности лежат на прямой b. Собственные (идеальные) для пространства $\widehat{H}^3$ точки оси b удалены от прямой a на эллиптическое (гиперболическое) расстояние $r=\pi\rho/2$ $(r=i\pi\rho/2)$, т.е. на половину длины эллиптической (гиперболической) прямой.

4. Поверхности Клиффорда с гиперболической осью. Эллиптическую (гиперболическую) поверхность Клиффорда пространства $\widehat{H}^3$ с гиперболической осью b и радиусом m обозначим ϑ_e (ϑ_h). Совмещая прямую b с координатной прямой A_3A_4 репера R^* и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям п. 3, получим уравнения поверхностей ϑ_e, ϑ_h в репере R^*:

$$\vartheta_e: x_1^2+x_2^2-\tan^2\frac{m}{\rho}x_3^2+\tan^2\frac{m}{\rho}x_4^2=0,\ (8)$$
$$\vartheta_h: x_1^2+x_2^2+\tanh^2\frac{m}{\rho}x_3^2-\tanh^2\frac{m}{\rho}x_4^2=0.\ (9)$$

В эллиптическом (гиперболическом) случае при $m=\pi\rho/2-r$ $(m=i\pi\rho/2-r)$ уравнения (8), (9) совпадают с уравнениями (6), (7) соответственно. Следовательно, поверхность Клиффорда с эллиптической осью a и эллиптическим (гиперболическим) радиусом r является поверхностью Клиффорда с гиперболической осью b и радиусом $m=\pi\rho/2-r$ $(m=i\pi\rho/2-r)$.

Таким образом, тип поверхности Клиффорда однозначно определен ее радиусом и не зависит от начального выбора оси. Поверхность Клиффорда каждого типа имеет две оси, эллиптическую и гиперболическую.

Отметим, что при вещественных (комплексных) значениях радиуса гиперболическая поверхность Клиффорда расположена в собственной (идеальной) области пространства $\widehat{H}^3$.

Если радиус поверхности Клиффорда равен четверти эллиптической прямой, т.е. $r=m=\pi\rho/4$, то поверхности (6) и (8) совпадают. Следовательно, поверхность Клиффорда радиуса $\pi\rho/4$ является множеством точек пространства, одинаково удаленных от двух взаимно полярных прямых.

Как и в случае с эллиптической прямой, для гиперболической прямой пространства $\widehat{H}^3$ не существует параллелей Клиффорда, отличных от поляры данной прямой относительно абсолюта.

Сформулируем полученные результаты в следующих теоремах.

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Теорема 1. *В пространстве $\widehat{H}^3$ эллиптическая (гиперболическая вещественного радиуса) поверхность Клиффорда является эллиптическим (гиперболическим) бипараболоидом. Гиперболическая поверхность Клиффорда комплексного радиуса принадлежит пространству Лобачевского* Λ^3.

Теорема 2. *Прямая пространства $\widehat{H}^3$ не имеет параллелей Клиффорда, отличных от ее поляры относительно абсолюта.*

5. Оси вращения поверхности Клиффорда.

Теорема 3. *Оси эллиптической (гиперболической) поверхности Клиффорда пространства $\widehat{H}^3$ являются ее осями вращения.*

Доказательство. Рассуждения проведем в два этапа. На первом этапе докажем теорему для эллиптической оси поверхности Клиффорда каждого типа, на втором – для гиперболической.

I. Каждая эллиптическая (гиперболическая) плоскость, содержащая эллиптическую ось a поверхности Клиффорда, ортогональна ее гиперболической оси b. В координатах используемого репера R^* каждая такая плоскость MA_1A_2 задана уравнением $m_4x_3 - m_3x_4 = 0$. Следовательно, ее координаты $(0:0:m_4:-m_3)$ удовлетворяют первое (второе) неравенство из (4). При этом условии коэффициент $\frac{m_3^2}{m_4^2} - 1$ в уравнении

$$x_1^2 + x_2^2 - \cot^2\frac{r}{\rho}\, x_4^2\left(\frac{m_3^2}{m_4^2} - 1\right) = 0 \quad (10)$$

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \coth^2\frac{r}{\rho}\, x_4^2\left(\frac{m_3^2}{m_4^2} - 1\right) = 0\right) \quad (11)$$

линии пересечения плоскости MA_1A_2 и поверхности Клиффорда (6) (или (7) соответственно) больше (меньше) нуля. Следовательно, уравнение (10) (или (11) соответственно) задает в эллиптической (гиперболической) плоскости MA_1A_2 окружность (гиперцикл [6]) с центром на прямой b. Таким образом, эллиптическая (гиперболическая) поверхность Клиффорда образована вращением вокруг прямой b. Заметим, что вращение по окружности эллиптической плоскости или по гиперциклу гиперболической плоскости положительной кривизны является циклическим. Следовательно, и вращение поверхности Клиффорда вокруг гиперболической оси является циклическим.

II. Каждая гиперболическая плоскость, содержащая гиперболическую ось b поверхности Клиффорда, ортогональна ее эллиптической оси a. В координатах репера R^* каждая такая плоскость MA_3A_4 задана уравнением $m_2x_1 - m_1x_2 = 0$. Следовательно, линии пересечения такой плоскости с эллиптической и гиперболической поверхностями Клиффорда, заданными уравнениями (6) и (7) соответственно, имеют в репере R^* уравнения

$$\tan^2\frac{r}{\rho}x_1^2\left(\frac{m_3^2}{m_4^2} + 1\right) - x_3^2 + x_4^2 = 0, \quad (12)$$

$$\tanh^2\frac{r}{\rho}x_1^2\left(\frac{m_3^2}{m_4^2} + 1\right) + x_3^2 - x_4^2 = 0. \quad (13)$$

В гиперболической плоскости MA_3A_4 уравнение (12) (или (13) соответственно) задает эллиптический (гиперболический) цикл [6] с центром на прямой a. Таким образом, эллиптическая (гиперболическая) поверхность Клиффорда образована вращением вокруг своей эллиптической оси. Вращение по эллиптическому (гиперболическому) циклу в гиперболической плоскости положительной кривизны не является циклическим (см. [6, раздел 3.8]). Следовательно, и вращение поверхности Клиффорда вокруг эллиптической оси не является циклическим.

Аналогично можно показать, что оси несобственной гиперболической поверхности Клиффорда пространства $\widehat{H}^3$ (см. уравнение (9)) являются осями вращения.

Теорема доказана.

6. Поверхности Клиффорда как круговые цилиндры пространства $\widehat{H}^3$. Согласно рассуждениям второго этапа доказательства Теоремы 3 эллиптическая поверхность Клиффорда образована движением окружности вдоль собственной для пространства $\widehat{H}^3$ ветви гиперболической оси поверхности при условии, что центр окружности лежит на оси сдвига, а содержащая ее эллиптическая плоскость ортогональна этой оси.

Собственная гиперболическая поверхность Клиффорда образована движением гиперцикла вдоль несобственной для пространства $\widehat{H}^3$ ветви гиперболической оси при условии, что центр гиперцикла лежит на оси сдвига, а содержащая его гиперболическая плоскость положительной кривизны ортогональна оси сдвига. Несобственная гиперболическая поверхность Клиффорда образована аналогичным движением, только роль образующего гиперцикла играет окружность плоскости Лобачевского.

Описанный способ образования поверхностей Клиффорда роднит их с круговыми цилиндрами евклидова пространства. Но в отличие от таких цилиндров образующими поверхностей Клиффорда служат не прямые, а циклы гиперболических плоскостей, эллиптические или гиперболические в зависимости от типа поверхности.

Замечание. Обратим внимание на тот факт, что уравнения (10), (11), определяющие в репере R^* линии вращения в секущих плоскостях поверхностей Клиффорда, зависят от координат m_3, m_4 переменной точки M, определяющей секущую плоскость MA_1A_2, ортогональную оси поверхности. В связи с этим может сложиться неверное представление о зависимости от координат m_3, m_4 радиусов линий вращения, противоречащее описанному способу образования поверхностей. Покажем, что радиусы линий вращения (10), (11) не зависят от координат m_3, m_4, следовательно, не зависят от секущей плоскости MA_1A_2.

Центры линий вращения (10), (11), обозначим их S, лежат на гиперболической оси b и в плоскости MA_1A_2, в репере R^* они заданы координатами $S(0:0:m_3:m_4)$. Выберем на линиях (10), (11) соответственно точку

$$Q\left(\cot\frac{r}{\rho}\sqrt{m_3^2 - m_4^2} : 0 : m_3 : m_4\right),\ Q\left(\coth\frac{r}{\rho}\sqrt{m_4^2 - m_3^2} : 0 : m_3 : m_4\right). \quad (14)$$

Вычисляя по формулам соответственно (2) и (3) расстояния между точками S и Q, в случае эллиптической и соответственно гиперболической поверхности Клиффорда получаем

$$\cos\frac{|SQ|}{\rho} = \sin\frac{r}{\rho}, \cosh\frac{|SQ|}{\rho} = \sinh\frac{r}{\rho}. \quad (15)$$

Согласно равенствам (15) радиусы линий вращения (10), (11) постоянны, они не зависят от выбора секущей плоскости и однозначно определены радиусом поверхности Клиффорда.

В заключение отметим, что радиус поверхности Клиффорда является ее единственным инвариантом. К геометрическим ковариантам (см. [8]) поверхности Клиффорда относятся ее оси и касательные в точках абсолюта коевклидовы плоскости.

Литература:

1. Розенфельд Б.А., Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.
2. Ромакина Л.Н., Классификация тетраэдров с негиперболическими гранями в гиперболическом пространстве положительной кривизны // Чебышевский сб. 2015. Т. 6, № 2. С. 208–221.
3. Romakina L.N., Dihedrons of a Hyperbolic Three-Space of Positive Curvature // International Electronic Journal of Geometry, Vol. 9, iss. 2, 2016, pp. 50–58.
4. Ромакина Л.Н., Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2008.
5. Ромакина Л.Н., Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013.
6. Ромакина Л.Н., Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013.
7. Богомолов С.А., Введение в неевклидову геометрию Римана. М.;Л.: ОНТИ ГТТИ, 1934.
8. Розенфельд Б.А., Неевклидовы геометрии. М.: Гостехтеориздат, 1955.
9. Ефимов Н.В., Высшая геометрия. М.: Наука, 1971.
10. Клейн Ф., Неевклидова геометрия. М.;Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.
11. Ромакина Л.Н., Измерение двугранных углов гиперболического пространства положительной кривизны // Инновационные технологии научного развития : сб. научн. тр. Уфа : ООО «Аэтерна», 2016. С. 28–30.