Развитие представлений о геометрии окружающего пространства

Ромакина Людмила Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Саратовский государственный университет (г. Саратов)

1. Введение. Представления об окружающем пространстве менялись на протяжении всего пути развития человечества. От моделей мира, основанного на трех слонах, китах или черепахах, сильнейшие мыслители своих эпох выводили человечество к новым высотам понимания геометрии и физики "реального" пространства. Тысячелетиями формировалось геометрическое учение, систематически и наиболее полно для своего времени изложенное в труде «Начала» древнегреческим ученым Евклидом (ок. 365-300 до н.э.) и названное позднее евклидовой геометрией. Выполнимость основных положений учения Евклида не вызывала сомнений, и почти два тысячелетия от создания «Начал» евклидова геометрия была единственной геометрической системой, принятой человечеством. Именно ее считали геометрией окружающего пространства. Параллельно развивалась и сферическая геометрия, но сферу рассматривали как поверхность в евклидовом пространстве, поэтому к кардинальным переменам в понимании геометрии окружающего мира сферическая геометрия не привела.

Первая половина девятнадцатого века ознаменовала переход человечества к новым геометрическим представлениям. Два выдающихся геометра, Н.И. Лобачевский и Я. Больяи, независимо друг от друга построили и подарили миру новую геометрическую систему. Цена подарка для самих создателей оказалась очень высокой, платить пришлось тяжелыми жизненными потрясениями и жестокими лишениями. Дождаться признания своих идей ученым так и не удалось. Но по меркам мироздания их идеи были приняты довольно скоро и привели многих математиков и физиков к соблазну утверждать, что окружающее физическое пространство при переходе к большим размерам подчиняется законам геометрии Лобачевского, или гиперболической геометрии отрицательной кривизны. Николай Иванович Лобачевский называл развиваемую систему воображаемой геометрией и пангеометрией [1].

В следующий век после первого доклада о гиперболической геометрии, проведенного Н.И. Лобачевским в Казанском университете 23 (11) февраля 1826 г., были предложены и другие геометрические системы. Наиболее известные из них – геометрии Римана и Минковского. Некоторые новые системы с той или иной степенью настойчивости приписывались Вселенной, в то время как другим в применимости в окружающем пространстве было отказано. Например, Ф. Клейн считал [2, стр. 200], что из девяти плоских геометрий, включенных им в проективную схему, в реальном физическом пространстве могут быть реализованы лишь геометрии с эллиптическим типом измерения углов: евклидова, эллиптическая и геометрия Лобачевского. Обоснование своего суждения Ф. Клейн строил, опираясь на субъективное восприятие окружающего пространства, рассматривая движения деревянного клина.

Одной из геометрий, допускающих построение на проективной основе, но по субъективным причинам не входящей в классическую схему Кэли-Клейна (см. [3, гл. 3]), является геометрия гиперболического пространства положительной кривизны. Это пространство можно реализовать на идеальной области пространства Лобачевского или на гиперсфере вещественного радиуса в псевдоевклидовом пространстве на единицу большей размерности. Реализацию на гиперсфере псевдоевклидова пространства в 1917 г. нидерландский астроном Виллем де Ситтер предложил в качестве одной из космологических моделей [4]. Вполне закономерно, что следующий за этим событием век отмечен попытками ученых убедить Вселенную подчиниться предложенным ей на данном этапе законам модели де Ситтера.

В представленной статье, помня о китах, слонах и черепахах, к подобным идеям отнесемся скептически и от рассуждений о геометрии Вселенной воздержимся, разделяя при этом уверенность А. Пуанкаре [5] и П.А.М. Дирака [6] в том, что каждая непротиворечивая геометрическая система может найти свое применение в описании тех или иных явлений, тех или иных систем окружающего физического пространства.

Для того, чтобы утверждать, что мир евклидов, псевдоевклидов, гиперболический или какой-либо еще, необходимо понимать, какими особенностями отличаются примеряемые ко Вселенной, или к некоторым ее частям, геометрические системы. Причем рассматривать эти системы необходимо с общих позиций, в единой схеме. Такой схемой может служить проективная схема Кэли-Клейна [7, 8]. Опишем в этой схеме модели геометрических пространств.

2. Проективные интерпретации пространств. Трехмерное вещественное проективное пространство RP_3 пополним мнимыми точками так, чтобы каждой ненулевой тройке комплексных чисел, определенных с точностью до общего множителя, соответствовала точка, координатами которой в некотором репере с вещественными вершинами служит данная тройка чисел. В качестве преобразований пополненного пространства, обозначим его P_3, будем рассматривать те проективные преобразования этого пространства, которые сохраняют природу объектов, т.е. вещественные (мнимые) точки переводят в вещественные (мнимые) точки. Другими словами, под P_3 будем понимать промежуточный объект между вещественным проективным пространством RP_3 и комплексным проективным пространством CP_3. Именно этот объект, начиная с работ А. Кэли (см., например, [9, 10]), используют для построения проективных интерпретаций евклидова и неевклидовых пространств. В классической литературе по неевклидовым геометриям специальный термин для пространства P_3 обычно не используют, П.С. Александров называет пространство P_3 комплексным проективным пространством с фиксированной вещественной частью [11].

Зафиксируем в пространстве P_3 некоторую фигуру F, будем считать ее бесконечно удаленной, и рассмотрим пространство $K=P_3\backslash F$, группу G всех линейных преобразований которого (в проективных координатах) составляют проективные автоморфизмы фигуры F. Фигуру F называют *абсолютом* пространства К, группу G – *фундаментальной группой* этого пространства. С помощью абсолюта в пространстве К можно вводить различные *метрики* – числовые характеристики совокупностей объектов, инвариантные в действиях группы G. Поскольку группа G является подгруппой группы проективных преобразований, пространство К называют *пространством с проективными метриками*. В классическую проективную схему Кэли-Клейна входят пространства, абсолют которых – образ второго порядка.

Приведем примеры введенных понятий.

1. Пространство P_3 с фиксированной, или бесконечно удаленной в нем плоскостью α называют *аффинным трехмерным пространством*, плоскость α – *абсолютом* этого пространства, а группу всех проективных автоморфизмов плоскости α – *группой аффинных преобразований*. Группа аффинных преобразований – фундаментальная группа аффинного пространства. Пространства, фундаментальные группы которых являются подгруппами группы аффинных преобразований, называют *пространствами с аффинной базой*. К таким пространствам относятся, например, евклидово и псевдоевклидово пространства.

В абсолютной плоскости α евклидова (псевдоевклидова) пространства R^3 (R_1^3) дополнительно зафиксирована нулевая (овальная) линия. Напомним, что *овальной* (*нулевой*) линией называют невырожденную линию второго порядка, содержащую (не содержащую) вещественные точки [12, 13]. Таким образом, абсолютом евклидова (псевдоевклидова) пространства R^3 (R_1^3) является эллиптическая (расширенная гиперболическая) плоскость.

Фиксация овальной линии γ в абсолюте пространства R_1^3 позволяет с каждой точкой этого пространства связать вещественный конус изотропных направлений, называемый *изотропным*, или *световым* конусом данной точки.

Все прямые пространств с аффинной базой параболические, они имеют одну бесконечно удаленную вещественную точку, точку пересечения данной прямой с абсолютной плоскостью, вследствие этого незамкнуты. Все плоскости евклидова пространства одного типа – евклидовы. Абсолют евклидовой плоскости – вещественная прямая с фиксированной парой мнимо сопряженных точек на ней. Пространство R_1^3 содержит плоскости трех типов. Плоскость пространства R_1^3 является евклидовой (псевдоевклидовой), если она пересекает линию γ в двух мнимо сопряженных (вещественных) точках. Плоскость пространства R_1^3 является флаговой, или плоскостью Галилея, если она касается линии γ. Абсолют псевдоевклидовой (флаговой) плоскости – вещественная прямая с фиксированной на ней парой вещественных различных (совпавших) точек.

К метрическим инвариантам в аффинном пространстве относятся: простое отношение трех точек, простое отношение трех параллельных плоскостей, простое отношение трех параллельных прямых, лежащих в одной плоскости, и др.

К метрическим инвариантам в пространствах с аффинной базой относятся: мера угла между прямыми, мера угла между плоскостями и др. Фундаментальные группы пространств с аффинной базой составляют подобия. Группы движений таких пространств – подгруппы соответствующих фундаментальных групп. Расстояния между точками, между параллельными прямыми, расстояния от точки до плоскости и другие аналогичные величины инвариантны в движениях пространств с аффинной базой, но в преобразованиях фундаментальных групп данных пространств инвариантами не являются.

2. *Гиперболическими* в классической теории неевклидовых геометрий называют пространства, реализуемые в проективном пространстве с фиксированной овальной гиперквадрикой [8, стр. 210]. Таким образом, абсолютом гиперболического пространства является овальная поверхность, а его фундаментальной группой – группа автоморфизмов овальной поверхности.

Трехмерное гиперболическое пространство отрицательной кривизны, или *пространство Лобачевского* Λ^3, реализуется на внутренней относительно овальной поверхности области проективного пространства P_3. На внешней области относительно овальной поверхности в P_3 реализуется *гиперболическое пространство* $\hat{H}^3$ *положительной кривизны* [14]. Пространство $\hat{H}^3$ является проективной моделью 3-пространства де Ситтера.

Все прямые пространства Лобачевского гиперболические, они имеют две различные вещественные бесконечно удаленные точки. В пространстве $\hat{H}^3$ прямые трех типов: гиперболические, параболические и эллиптические с двумя мнимо сопряженными точками на абсолюте.

Все плоскости пространства Лобачевского – плоскости Лобачевского, а в пространстве $\hat{H}^3$ плоскости относятся к трем типам: коевклидовы, эллиптические и гиперболические плоскости положительной кривизны.

В отличие от пространств с аффинной базой фундаментальные группы гиперболических пространств являются группами движений. К метрическим инвариантам в гиперболических пространствах относятся: длины отрезков и квазиотрезков, мера угла между прямыми, мера угла между плоскостями, расстояние от точки до плоскости и др.

3. О геометрии реального физического пространства. В данном разделе ответим на два вопроса: является ли окружающее пространство евклидовым, и почему из множества возможных геометрических систем для описания окружающего мира мы выбираем евклидову геометрию?

1. Метрика в геометрическом пространстве вводится с помощью абсолюта (см., например, [3, 15, 16]), т.е. с помощью бесконечно удаленного объекта пространства. Следовательно, и в окружающем пространстве метрика определена объектом, который наблюдателем воспринимается как бесконечно удаленный. В качестве движений (подобий) пространства наблюдатель воспринимает такие преобразования, в которых бесконечно удаленный объект переходит в себя. В евклидовом пространстве бесконечно удалена плоскость и в ней зафиксирована нулевая линия. В пространстве Лобачевского бесконечно удалена овальная поверхность, а наблюдатель, вводящий метрику, находится внутри этой поверхности. В пространстве гиперболическом положительной кривизны абсолютом также служит овальная поверхность, но наблюдатель находится во внешней относительно нее области пространства. В псевдоевклидовом пространстве бесконечно удалена плоскость с фиксированной в ней овальной линией.

Понимая различия рассмотренных в единой схеме геометрических систем, на вопрос о метрике реального пространства, о том, является ли оно евклидовым, ответим вопросом: может ли окружающее физическое пространство зависеть от того, какой объект наблюдатель выбирает в качестве бесконечно удаленного? Реальное пространство без наблюдателя не является метрическим. Это наблюдатель, причем чаще всего субъективно, выбирает некоторую геометрическую систему для описания свойств фигур и процессов их взаимодействия в окружающем пространстве.

2. В работе [17] показано, что выбор человечеством евклидовой геометрии для описания свойств окружающего мира субъективен, он обусловлен строением человеческого глаза. В буквальном смысле справедливо утверждение: мы **видим** мир евклидовым.

Чтобы облегчить процесс осознания предложенной идеи, приведем простой пример. Предположим, мы от рождения видим мир сквозь розовое стекло. Если при этом все, с кем мы имеем возможность обсуждать мир, пользуются стеклом того же цвета, то мир мы будем считать розовым. Но что произойдет при изменении цвета стекла? Аналогичная ситуация складывается при восприятии метрики окружающего мира. Все представители человечества наделены одной и той же геометрической схемой строения глаз. Световые сигналы внешнего мира воспринимаются сетчаткой, имеющей вследствие внутреннего давления стекловидного тела форму сферы. Центр сферы сетчатки условно определен радиальным направлением нервных импульсов, передающих от сетчатки в мозг зрительную информацию. Полярная плоскость центра сферы сетчатки относительно самой сетчатки воспринимается мозгом как бесконечно удаленная плоскость (или абсолют). Нулевая линия пересечения этой плоскости со сферой сетчатки определяет евклидову метрику. Именно ее наблюдатель приписывает окружающему пространству. При существенном изменении формы зрительного органа наблюдатель утрачивает способность воспринимать евклидову геометрию окружающего мира.

Итак, мы **видим** мир евклидовым. Это, с одной стороны, позволяет человеческому сообществу адаптироваться в физическом пространстве и понимать многие важные вопросы мироздания. С другой стороны, отсутствие альтернативы в восприятии геометрии окружающего мира тормозит процесс его освоения. Поэтому важно не только развивать различные геометрические системы, следуя наставлениям Ф. Клейна, но и широко их популяризировать.

4. О применении гиперболических геометрий при изучении атома в модели Резерфорда. Гиперболические геометрии позволяют моделировать различные процессы окружающего нас мира, причем не только реального физического мира в привычном его понимании. Современные исследования предоставляют новые возможности применения неевклидовых геометрий, в частности, гиперболических, в весьма неожиданных направлениях. Например, в работе [18] М.П. Замаховским предложено использование неевклидовых геометрий в моделировании экономических процессов. Исследования М.П. Замаховского показывают, что специалист, глубоко понимающий неевклидовы геометрии, начинает "видеть" их проявления в окружающем мире.

Приведем пример возможного использования гиперболических геометрий для описания атома в модели Резерфорда. Основные общепризнанные на данном этапе развития науки представления о строении атома описаны моделью Резерфорда. Согласно этой модели при невозмущенных состояниях атома существуют заряженные частицы, находящиеся внутри атомного ядра, и противоположно к ним заряженные частицы, находящиеся во внешней относительно ядра области. Причем «ядро — предположительно сферическое — окружено очень мощным силовым барьером» [19, стр. 558]. Характеризуя ядро, Резерфорд также пишет: «эта область не сферическая, а скорее похожа на плоский эллипсоид» [19, стр. 556]. Применяя проективную модель Кэли-Клейна, данные представления можно описать следующим образом.

В рассматриваемой части пространства, содержащей атом, существует ограниченная замкнутая поверхность, недостижимая как для некоторых внутренних, так и для некоторых внешних относительно нее атомных частиц. Экспериментальные данные о строении атома получены наблюдателем с евклидовым восприятием мира, т.е. в предположении, что содержащее атом пространство евклидово. Наиболее простой ограниченной замкнутой поверхностью в трехмерном евклидовом пространстве является поверхность второго порядка — эллипсоид, или сфера в частном случае. С проективной точки зрения эллипсоид — овальная поверхность, не имеющая общих вещественных точек с абсолютной плоскостью евклидова пространства, воспринимаемой наблюдателем как бесконечно удаленный объект.

Таким образом, для описания геометрических свойств траекторий движения атомных частиц, учитывая описанный физиками характер их взаимодействия, целесообразно применять геометрическую систему, в которой в качестве абсолюта выступает овальная поверхность. Такой системой является гиперболическая геометрия. Для описания внутриядерных процессов следует применять геометрию пространства Лобачевского Λ^3, а для описания процессов во внешней области относительно ядра — геометрию гиперболического пространства $\hat{H}^3$ положительной кривизны.

Обратим внимание, что при одновременном рассмотрении внутренних и внешних относительно ядра процессов геометрии пространств Λ^3 и $\hat{H}^3$ должны быть согласованы (см., например, введение согласованных длин отрезков и квазиотрезков плоскостей Λ^2, $\hat{H}$ и согласованных мер гиперболических углов на гиперболической плоскости положительной кривизны [3]).

Литература:

1. Лобачевский Н. И. Геометрические исследования по теории параллельных линий. М.;Л.: Изд-во Академии Наук СССР, 1945.

2. Клейн Ф., Неевклидова геометрия. М.;Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.

3. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013.

4. De Sitter W. On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis // Proc. Royal Acad. Amsterdam, 1917. Vol. 19, iss. 2. P. 1217–1225.

5. Пуанкаре А. О науке: Пер. с фр. / Под ред. Л.С. Понтрягина. – 2-е изд. стер. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

6. Дирак П.А.М. Совершенство теории тяготения Эйнштейна // СНТ. М.: Наука, 1967. С. 640.
7. Розенфельд Б. А., Замаховский М. П. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. М.: МЦНМО, 2003.
8. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.
9. Cayly A. A Six memoir upon quantics // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1859. № 149. P. 61-70.
10. Кэли А. Шестой мемуар о формах // Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. / Под ред. А.П.Нордена. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 222-252.
11. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
12. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия : в 2 ч. Ч. 2. М.: Просвещение, 1987.
13. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М.: Наука, 1971.
14. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013.
15. Бушманова Г. В., Норден А. П. Введение в конформную геометрию. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1964.
16. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
17. Romakina L. N. An eye as the tool of a choice of the Euclidean metric for the description of real physical space // Journal of Basic and Applied Research International, IKP, 2015. Vol. 9, iss. 3, pp. 147-154.
18. Замаховский М. П. Геометрические модели статистического показателя // Proceedings of the international scientific conference «Science, Technology and Life – 2014». Czech Republic, Karlovy Vary, 27-28 December 2014. Karlovy Vary: Sklenĕпэ Můstek; Kirov: MCNIP, 2015. С. 441.
19. Резерфорд Э. Дискуссия о строении атомного ядра // Успехи физических наук, 1929. Т. 9, № 5.