www.esa-conference.ru

Системы сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении

Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна, старший преподаватель
Ошский технологический университет

Аннотация. *В данной работе рассматриваются системы сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным аргументом, вырожденные уравнения которых в комплексных областях имеют несколько решений. Введено понятие области притяжения решений вырожденных уравнений. С использованием линии уровня гармонических функций, в комплексной области построены области и доказано, что они являются областями притяжения.*

Ключевые слова: *сингулярное возмущенное уравнение, точка покоя, гармонические функции, линии уровня, область притяжения.*

Введение

Сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения с комплексным аргументом исследованы в работах [3-11]. В [7-9] сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения с комплексным аргументом рассматриваются в некоторых комплексных областях, которые содержат отрезки действительной оси. Присоединенные уравнения [1-2], заданных уравнений, имеют одну точку покоя, причем она устойчива по Ляпунову в части отрезка действительной оси и неустойчива в другой части этого отрезка.

Доказано, решения начальных задач рассматриваемых уравнений при потере устойчивости не сразу уходит от возникшей неустойчивой точки покоя, а в течении конечного времени остается вблизи него. Это явление получило название «затягивание потери устойчивости при динамических бифуркациях».

В [8-9] доказано, сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения с комплексным аргументом в комплексных областях обладают рядом специфических свойств. В частности доказано существование так называемых «погранслойных линий», которые можно рассматривать как частные случаи линии Стокса. Эти линии рассматриваемые области делят на несколько частей, при этом, в одних частях решение стремится к решению вырожденного уравнения [1-2] по ε, а в других частях неограничена, в самой погранслойной линии решение не имеет предела по ε.

Также доказано, явление «затягивание потери устойчивости » происходит только при благоприятных условиях.

В [7-8] исследования проведены в предположении, что вырожденные уравнения, соответствующие рассматриваемым уравнениям в комплексных областях имеют одно единственное решение. Случаи, когда вырожденные уравнения имеют несколько решений ранее не рассмотрены.

В данной работе рассматриваются системы сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным аргументом, вырожденные уравнения которых в комплексных областях имеют несколько решений.

Постановка задачи

Пусть рассматривается система

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) + b(t)z^2(t,\varepsilon) + \varepsilon g\big(t, z(t,\varepsilon)\big), \qquad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0, \qquad (2)$$

$t \in \Omega$, $t_0 \in \Omega$ и её внутренняя точка; $z(t,\varepsilon) = colon\big(z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon)\big)$,

$A(t) = diag\big(a_1(t), a_2(t)\big)$; $b(t) = diag\big(b_1(t), b_2(t)\big)$;

$z^2(t,\varepsilon) = \mathrm{colon}\big(z_1^2(t,\varepsilon), z_2^2(t,\varepsilon)\big)$;

$g(t,z) = colon\big(g_1(t,z), g_2(t,z)\big)$; $z^0 = colon(z_1^0, z_2^0)$.

Предположим выполнения следующих условий:

U.1. $a_j(t), b_j(t) \in Q(\Omega)$.

U.2. $\forall t \in \Omega\ \big(\mathcal{I}m a_j(t) \neq 0, b(t)\ \neq 0\big)$ (j=1,2).

При $\varepsilon = 0$ из (1) получим вырожденную систему

$$A(t)\xi(t) + b(t)\xi^2(t) = 0, \qquad (3)$$

где $\xi(t) = colon\ \big(\xi_1(t), \xi_2(t)\big)$.

Если учесть U.1, то система (3) имеет решения

$\xi_1(t) = colon\ (0;0)$, $\xi_2(t) = colon(0; -a_2(t)/b_2(t))$, $\xi_3(t) = colon(-a_1(t)/b_1\,(t); 0)$, $\xi_4(t) = colon(-a_1(t)/b_1\,(t), -a_2(t)/b_2(t))$.

Введем следующие определения.

Определение. Если: 1. Существует область $\Omega_j \subset \Omega$;

2. $\forall t \in \Omega_j$ существует решение задачи $(1)-(2)$;

3. $\forall t \in \Omega_j\big(z(t,\varepsilon) \to \xi_j(t)$ по $\varepsilon\ \big)$,

то область Ω_j назовём областью притяжения решения $\xi_j(t)$.

U.3 $g(t,z) \in Q(H)$ и $\forall\big((t,\tilde z),(t,\tilde{\tilde z})\big) \in H\big(\|g(t,\tilde z) - g(t,\tilde{\tilde z})\| \le M_j\|\tilde z - \tilde{\tilde z}\|\big)$, где $H = \{(t,z)|t \in \Omega, \|z - \xi_j\| \le M_0\}$.

Поставим задачу. Существуют ли области притяжения Ω_j для решений $\xi_j(t)$ (j=1,2,3,4)?

Предварительные построения

Введем в рассмотрение функции $F_{j1}(t_1,t_2), F_{j2}(t_1,t_2)$.Согласно U.1 функции $F_{jk}(t_1,t_2)-$ гармонические. По определению $F_{jk}(t_0) = 0$.Тогда существуют линии уровня $(L_{j0}) = \{t \in \Omega |\, F_{j1}(t) = 0\}$проходящие через точку t_0. Пусть выполняется условие

U.4. Линии уровня (L_{10}) и(L_{20})не имеют общих точек, кроме точки t_0.

Линии (L_{j0}) область Ω делят на части Ω_k(k=1,2,3,4).

Если учесть U.2, то линия (L_{10}) не имеет кратных точек и область Ω делит на две части в каждом из рых$F_{11}(t_1,t_2) \le 0$или $F_{11}(t_1,t_2) \ge 0$, причем равенство имеет место только для точек (L_{10}). Аналогичное имеет место для (L_{20}) и $F_{21}(t_1,t_2)$. Существует единственная область, где $F_{11}(t_1,t_2) \le 0$и $F_{21}(t_1,t_2) \le 0$, а в оставшихся областях функции $F_{11}(t_1,t_2)$, $F_{21}(t_1,t_2)$по совокупности принимают значения разных знаков. Для определенности будем считать

$\forall t \in \Omega_1(F_{11}(t_1,t_2) \le 0 \wedge F_{21}(t_1,t_2) \le 0)$,

$\forall t \in \Omega_2(F_{11}(t_1,t_2) \le 0 \wedge F_{21}(t_1,t_2) \ge 0)$,

$\forall t \in \Omega_4(F_{11}(t_1,t_2) \ge 0 \wedge F_{21}(t_1,t_2) \ge 0)$,

$$\forall t \in \Omega_3(F_{11}(t_1,t_2) \ge 0 \wedge F_{21}(t_1,t_2) \le 0) .$$

Согласно U.1 линии уровня определяемые функциями $F_{jk}(t_1,t_2)(j,k = 1,2)$являются аналитическими кривыми и их можно представить параметрически. Возьмём (L_{j0}) и её уравнение представим в виде

$t_1 = t_1(s_j)$, $t_2 = t_2(s_j)$, $0 \le s_j < \tilde{s}_{j0}$

(случай $\tilde{s}_{j0} = +\infty$не исключается), где s_jозначает длину дуги (L_{j0})отсчитываемого от точки t_0. Возьмём $(L_{2k}) = \{t \in \Omega \setminus F_{2k}(t_1,t_2) = L_{2k}\, const, k = 1,2\}$

и её уравнение представим в виде $t_1 = t_1(\sigma_k)$, $t_2 = t_2(\sigma_k)$, $0 \le \sigma_k < \tilde{\sigma}_{k0}$,

(случай $\tilde{\sigma}_{k0} = +\infty$не исключается),где σ_kозначает длину дуги (L_{2k})отсчитываемого от точки $\tilde{t} \in (L_{j0})$.

Также обозначим

$F_{k2}(t_1,t_2) = F_{k2}(t_1(s_k),t_2(s_k)) \equiv F_{k2}(s_k)$,

$F_{k1}(t_1,t_2) = F_{k1}(t_1(\sigma_k),t_2(\sigma_k)) \equiv F_{k1}(\sigma_k)$,$(k = 1,2)$.

Рассмотрим линии уровня

$(L_{j1}) = \{t \in \Omega | F_{j1}(t_1,t_2) = L_{j1} - const\}$,

$(L_{j2}) = \{t \in \Omega | F_{j2}(t_1,t_2) = L_{j2} - const\}$,

и составим множества $\{(L_{j1})\}, \{(L_{j2})\}$. Заметим, $(L_{j0}) \in \{(L_{j1})\}, j = 1,2$.

Пусть выполняется условие

$U.5$. Пусть произвольные линии из $\{(L_{11})\}$ и $\{(L_{22})\}$, а также $\{(L_{12})\}$ и $\{(L_{21})\}$, имеют только единственную общую точку или не пересекаются, или совпадают.

Лемма 1. Пусть выполняется условие U.5 . Тогда$F_{11}(t_1,t_2)$ строго монотонна вдоль (L_{20}), а $F_{21}(t_1,t_2)$ строго монотонна вдоль (L_{10}).

Доказательство проведем только для $F_{11}(t_1,t_2)$. Доказательство для $F_{21}(t_1,t_2)$ проводится аналогично.

Пусть T_{11} и $\tilde{T}_{12}$ произвольные точки принадлежащие (L_{20}) .Будем считать, что произвольные линии из $\{(L_{11})\}$ и $\{(L_{22})\}$ имеют только единственную общую точку.

Согласно U.5 существуют различные линии $(L_{11}(T_{11}))$, $(L_{11}(T_{12}))$ для которых справедливо неравенство $L_{11}(T_{11}) > L_{11}(T_{12})(<)$.

Таким образом$F_{11}(T_{11}) > F_{11}(T_{12})(<)$. Лемма доказана.

Решение задачи

Поставленная задача решается следующей теоремой.

Теорема. Пусть выполняются условия U.1- U.5 Тогда для каждого решения $\xi_j(t)$существует решение $z(t,\varepsilon)$задачи(1) $-$(2) удовлетворяющее условия $\|z(t,\varepsilon) - \xi_j(t)\| \le M_2\varepsilon$ и область притяжения $\Omega_j \subset \Omega$ $(j = 1,2,3,4)$.

Доказательство. Возьмём решение $\xi_1(t) = colon\ (0;0)$.

В (2) считаем $\|z(t_0,\varepsilon)\| \le M_2\varepsilon$ и задачу $(1)-(2)$ заменим следующим

$$z_j(t,\varepsilon) = z_j^0 exp\frac{1}{\varepsilon}F_j(t) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_j(t) - F_j(\tau)\right) \times$$
$$\times \left[b_j(\tau)z_j^2(\tau,\varepsilon) + \varepsilon g_j(\tau,z_1(\tau,\varepsilon),z_2(\tau,\varepsilon))\right]d\tau \qquad (4)$$

(4) будем рассматривать в области Ω_1.

Далее в записях аргументы неизвестной функции будем опускать. К (4) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим следующим образом

$$z_{jm} = z_j^0 E_j exp\frac{1}{\varepsilon}F_j(t)\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} E_j exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_j(t) - F_j(\tau)\right) \times$$
$$\times \left[b_j(\tau)z_{jm-1}^2 + g_j(\tau,z_{1m-1},z_{2m-1})\right]d\tau, \qquad (5)$$
$$z_{j0} = 0, j = 1,2;\ m = 1,2,\dots .$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Оценим последовательные приближения (5). Рассмотрим случаи: 1. $t \in (L_{10})$ 2.$t \in (L_{20})$ 3. $t \in \Omega_1$, причем t является внутренней точкой области Ω_1.

1. Пусть $t \in (L_{10})$.

В качестве пути интегрирования возьмём $(L_{10})[t_0, \tilde{t} \in L_{10}]$и учитывая параметрическое представление (L_{10}) (5) перепишем в виде

$$z_{jm} = z_j^0 E_j exp\frac{1}{\varepsilon}F_j(s_1) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s_1} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_j(s_1) - F_j(\tilde{s}_1)\right) \times$$
$$\times \left[\tilde{b}_j(\tilde{s}_1)z_{jm-1}^2 + \varepsilon\tilde{g}_j(\tilde{s}_1, z_{1m-1}, z_{2m-1})\right]d\tilde{s}_1, \qquad (6)$$

где $\tilde{b}_j(\tilde{s}_1) \equiv b_j(\tau(\tilde{s}_1))\left(\tau_1'(\tilde{s}_1) + i\tau_2'(\tilde{s}_1)\right), \tilde{g}_j(\tilde{s}_1, z_{1m-1}, z_{2m-1})\Big) \equiv$

$\equiv g_j(\tau(\tilde{s}_1), z_{1m-1}, z_{2m-1})\left(\tau_1'(\tilde{s}_1) + i\tau_2'(\tilde{s}_1)\right), F_j(s_1) \equiv F_j\left(t(\tilde{s}_1)\right)$,

$z_{jm-1} = z_{jm-1}(\tau(\tilde{s}_1), \varepsilon), 0 \le \tilde{s}_1 \le s_1 < \tilde{s}_{10}$.

Первые приближения определяются следующим образом

$$z_{j1} = z_j^0 exp\frac{1}{\varepsilon}F_j(s_1) + \int_0^{s_1} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_j(s_1) - F_j(\tilde{s}_1)\right)\tilde{g}_j(\tilde{s}_1, 0{,}0)d\tilde{s}_1. \qquad (7)$$

Каждую из компонент z_{j1} $(j = 1{,}2)$оценим отдельно. Возьмём z_{11}. Для этого случая $exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_1(s_1) - F_1(\tilde{s}_1)\right) = exp\frac{i}{\varepsilon}\left(\mathcal{J}mF_1\left(t(s_1)\right) - \mathcal{J}mF_1\left(\tau(\tilde{s}_1)\right)\right) \equiv$

$\equiv exp\frac{i}{\varepsilon}\left(F_{12}(s_1) - F_{12}(\tilde{s}_1)\right), exp\frac{1}{\varepsilon}F_1(s_1) = exp\frac{i}{\varepsilon}\mathcal{J}mF_1(s_1)$.

Отметим, что вдоль (L_{10}) функция $F_{12}(\tilde{s}_1)$строго монотонна [6] т.е

$dF_{12}(\tilde{s}_1)/d\tilde{s}_1 \neq 0$.

Теперь учитывая U.3 , проинтегрировав по частям интеграл в правой части (7) получим оценку

$$|z_{11}| \le M_3 \cdot \varepsilon. \qquad (8)$$

Далее возьмём z_{21}.

Учитывая U.2, применяя интегрирование по частям и Лемму 1 получим

$$|z_{21}| \le M_3 \cdot \varepsilon. \qquad (9)$$

Определим второе приближения и проведем оценку

$$z_{j2} = z_{j1} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{s_1} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_j(s_1) - F_j(\tilde{s}_1)\right)\left[b_j(\tilde{s}_1)z_{j1}^2 + \varepsilon\left(\tilde{g}_j(\tilde{s}_1, z_{11}, z_{21}) - \tilde{g}_j(\tilde{s}_1, 0{,}0)\right)\right]d\tilde{s}_1.$$

В этом случае, достаточно учесть, что функции $b_j(\tilde{s}_1)$, $exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_j(s_1) - F_j(\tilde{s}_1)\right)$ограничены по модулю, а к разности $\left(\tilde{g}_j(\tilde{s}_1, z_{11}, z_{21}) - \tilde{g}_j(\tilde{s}_1, 0{,}0)\right)$применить условие U.3.

Получим

$|z_{j2}| \le \varepsilon(M_3 + M_4\tilde{s}_{10})$.

Выберем $\tilde{s}_{10}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$M_3 + M_4\tilde{s}_{10} \le M_4$, где $M_4 = M_{01} \cdot M_3^2 + M_1M_3$, $|b_j(\tilde{s}_1)| \le M_{01}$.

Имеем $\tilde{s}_{10} \le \frac{M_4 - M_3}{M_4}$. (10)

Таким образом при выполнении неравенство (10)

$$|z_{j2}| \le \varepsilon M_4$$

Продолжая процесс, при условии (10), получим

$$\|z_{jm}\| \le M_4\varepsilon, m = 1{,}2, \dots . \qquad (11)$$

Докажем сходимость последовательных приближений (6). Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$\sum_{m=1}^{\infty}(z_m - z_{m-1})$.

Имеем

$$z_m - z_{m-1} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{s_1} V(\tilde{s}_1, s_1, \varepsilon)[b(\tilde{s}_1)(z_{m-1}^2 - z_{m-2}^2) +$$
$$+\varepsilon\left(g(\tilde{s}_1, z_{m-1}) - g(\tilde{s}_1, z_{m-2})\right)]d\tilde{s}_1,$$

где $V(\tilde{s}_1, s_1, \varepsilon) = diag\left(exp\frac{1}{\varepsilon}(F_1(s) - F_1\tilde{s}), exp\frac{1}{\varepsilon}(F_2(s) - F_2\tilde{s})\right)$, $m = 2{,}3, \dots$.

Отсюда получим

$$\|z_m - z_{m-1}\| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{s_1} \|V(\tilde{s}_1, s_1, \varepsilon)\| [\|b(\tilde{s}_1)\|\|z_{m-1} - z_{m-2}\| \times$$

$\times \|z_{m-1} + z_{m-2}\| + \varepsilon M_1\|z_{m-1} - z_{m-2}\|]d\tilde{s}_1$.

Теперь учитывая оценки

$\|V(\tilde{s}_1, s_1, \varepsilon)\| \le 1$, $\|b(\tilde{s}_1)\| \le M_{01}$ и (11)

имеем

$\|z_m - z_{m-1}\| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{s_1}[M_{01} \cdot 2M_4\varepsilon + \varepsilon M_1]\, \|z_{m-1} - z_{m-2}\|d\tilde{s}_1 =$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$= (2M_{01}M_4 + M_1)\int_0^{s_1} \|z_{m-1} - z_{m-2}\|\, d\tilde{s}_1.$$

Введём обозначение $2M_{01}M_4 + M_1 \equiv M_5$,
тогда

$$\|z_m - z_{m-1}\| \le M_5 \int_0^{s_1} \|z_{m-1} - z_{m-2}\|\, d\tilde{s}_1. \qquad (12)$$

Из (12) при m=2 получается
$\|z_2 - z_1\| \le M_5 \int_0^{s_1} \|z_1\|\, d\tilde{s}_1 \le M_4 M_5 s_1$.
Далее при m=3
$\|z_3 - z_2\| \le M_4 M_5^2 \frac{s_1^2}{2}$.
Продолжив процесс получим

$$\|z_m - z_{m-1}\| \le M_4 \frac{(M_5 \cdot s_1)^{m-1}}{(m-1)!} \qquad (13)$$

Из (13) следует равномерная сходимость ряда
$\sum_{m=1}^{\infty}(z_m - z_{m-1})$ для значений $s_1 < \tilde{s}_{10} \le \frac{M_4 - M_3}{M_4}$.

Таким образом последовательность (6) равномерно сходится к некоторой функции $z(t,\varepsilon)$, которая является решением задачи (1)–(2) в части (L_{10}) (с длиной $\tilde{s}_{10} \le \frac{M_4 - M_3}{M_4}$) и для этого решения, согласно (11), справедлива оценка

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le M_4 \varepsilon. \qquad (14)$$

Если $t \in (L_{02})$,то повторяя все вычисление приведенные в предыдущем случае, получим аналогичную оценку $\|z(t,\varepsilon)\| \le M_4 \varepsilon$

Теперь рассмотрим случай $t \in \Omega_1$ и является её внутренней точкой. В (4) для компонент $z_j(t,\varepsilon)$ выберем пути интегрирования. Для $z_1(t,\varepsilon)$ путь состоит из $(L_{01})[t_0,\tilde{t}]$ и $(L_{12})[\tilde{t},t]$ а для $z_2(t,\varepsilon)$ путь состоит из $(L_{20})[t_0,\tilde{t}]$ и $(L_{22})[\tilde{t},t]$ (для удобства дальнейших записей в обеих случаях приняты одни и те же обозначения переменных $\tilde{t}$ и t.

Учитывая выбранный путь интегрирования задачу (1)–(2) представим в следующем виде

$$z_j(t,\varepsilon) = z_j^0 exp\frac{1}{\varepsilon}F_j(t) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tilde{t}} exp\frac{1}{\varepsilon}\Big(F_j(t) - F_j(\tau)\Big)\big[b_j(\tau)z_j^2 + \varepsilon g_j(\tau,z_1,z_2)\big]d\tau +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tilde{t}}^{t} exp\frac{1}{\varepsilon}\Big(F_j(t) - F_j(\tau)\Big)\Big[b_j(\tau)z_j^2 + \varepsilon g_j(\tau,z_1,z_2)\Big]d\tau\,. \qquad (15)$$

В (15) проведем следующие преобразования

$$z_1^0 exp\frac{1}{\varepsilon}F_1(t) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tilde{t}} exp\frac{1}{\varepsilon}\big(F_1(t) - F_2(\tau)\big)[b_1(\tau)z_1^2 + \varepsilon g_1(\tau,z_1,z_2)]d\tau =$$
$$= z_1^0 exp\frac{1}{\varepsilon}\big(F_{11}(t_1,t_2) + iF_{12}(t_1,t_2)\big) + \frac{1}{\varepsilon}exp\frac{1}{\varepsilon}\big(F_{11}(t_1,t_2) + iF_{12}(t_1,t_2)\big) \times$$
$$\times \int_{t_0}^{\tilde{t}} exp\frac{-i}{\varepsilon}F_{12}(\tau_1,\tau_2)[b_1(\tau)z_1^2 + \varepsilon g_1(\tau,z_1,z_2)]d\tau.$$

Согласно выбранным путям интегрирования $(t_1,t_2) \in (L_{12}), (\tilde{t}_1,\tilde{t}_2) \in (L_{12})$ и $F_{12}(t_1,t_2) = L_{12} = F_{12}(\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)$. Следовательно последнее выражение имеет вид

$$exp\frac{1}{\varepsilon}F_{11}(t_1,t_2)\Big\{z_1^0 exp\frac{i}{\varepsilon}L_{12} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tilde{t}} exp\frac{i}{\varepsilon}\big(L_{12} - F_{11}(\tau_1,\tau_2)\big) \times$$
$$\times [b_1(\tau)z_1^2 + \varepsilon g_1(\tau,z_1,z_2)]d\tau\}. \qquad (16)$$

(16) выражение содержащееся в {...} даёт функцию $z_1(\tilde{t},\varepsilon), \tilde{t} \in (L_{10})$.

Аналогичный результат получается и для $z_2(\tilde{t},\varepsilon), \tilde{t} \in (L_{20})$. С учетом полученных выводов, (15) перепишем в виде

$$z_j(t,\varepsilon) = \; exp\frac{1}{\varepsilon}F_{j1}(t_1,t_2)\cdot z_j(\tilde{t},\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tilde{t}}^{t} exp\frac{1}{\varepsilon}\Big(F_j(t) - F_j(\tau)\Big) \times \Big[b_j(\tau)z_j^2 + +\varepsilon g_j(\tau,z_1,z_2)\Big]d\tau. \qquad (17)$$

Напомним, при $\tilde{t} \in \big(L_{j0}\big)$, оценки для функций $z_j(\tilde{t},\varepsilon)$ получены в предыдущем случае ((14)–(15)).

Переходя к параметрическим уравнениям линий (L_{12}) уравнение (17) запишем так

$$z_j\big(t(\tau_j),\varepsilon\big) = exp\frac{1}{\varepsilon}F_{j1}\Big(t_1(\sigma_j),t_2(\sigma_j)\Big)\cdot z_j(\tilde{t},\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\Big(F_{j2}\big(t(\sigma_j)\; - \; -F_{j2}\Big(\tau\big(\tilde{\sigma}_j\big)\Big)\Big)\Big[b_j(\tilde{\sigma}_j)z_j^2\big(\tau(\tilde{\sigma}_j),\varepsilon\big) +$$
$$\varepsilon g_j\Big(\tau\big(\tilde{\sigma}_j\big), z_1\big(\tau(\tilde{\sigma}_j),\varepsilon\big), z_2\big(\tau(\tilde{\sigma}_j),\varepsilon\big)\Big)\Big] \times \times \tau'(\tilde{\sigma}_j)d\tilde{\sigma}_j. \qquad (18)$$

Введем обозначения

$z_j\big(t(\sigma_j),\varepsilon\big) \equiv z_j\big(\sigma_j,\varepsilon\big)\,, F_{j1}\big(\sigma_j\big) \equiv F_{j1}\Big(t_1\big(\sigma_j\big),t_2\big(\sigma_j\big)\Big)$,
$F_j(\sigma_1) \equiv F_j\big(t(\sigma_1)\big)\,, b_j\big(\sigma_j\big)\cdot\tau'\big(\sigma_j\big) \equiv b_{1j}\big(\sigma_j\big)$,

$$g_j\big(\tau(\sigma_j),z_1,z_2\big)\cdot\tau'\big(\sigma_j\big) \equiv g_{1j}\big(\sigma_j,z_1,z_2\big).$$

К (18) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим так

$$z_{jm} = exp\frac{1}{\varepsilon}F_{j1}\big(\sigma_j\big)\cdot z_j(\tilde{t},\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\Big(F_{j2}\big(\sigma_j\big) - F_{j2}\big(\tilde{\sigma}_j\big)\Big) \times$$
$$\times \big[b_j(\tilde{\sigma}_j)z_{jm-1}^2 + \varepsilon g_{1j}(\tilde{\sigma}_j, z_{1m-1}, z_{2m-1})\big] \times d\tilde{\sigma}_j\,, \qquad (19)$$
$$z_{j0}\big(\sigma_j,\varepsilon\big) \equiv 0, m = 1,2,\dots.$$

Оценим последовательные приближения (19). При оценке учтем, что по выбранным путям интегрирования функции $F_{j2}(\sigma_j)$являются убывающими т. е $F'_{j2}(\sigma_j) < 0$.

Следовательно $F_{j2}(\sigma_j) - F_{j2}(\tilde{\sigma}_j) < 0$, $F_{j1}(\sigma_j) \ll 0$, а также $|z_j(\tilde{t}, \varepsilon)| \le M_4\varepsilon$

Напишем первые приближения

$$z_{j1} = exp\frac{1}{\varepsilon}F_{j1}(\sigma_j)\cdot z_j(\tilde{t},\varepsilon) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_{j2}(\sigma_j) - F_{j2}(\tilde{\sigma}_j)\right)\times g_{1j}(\tilde{\sigma}_j, 0,0)d\tilde{\sigma}_j \qquad (20)$$

В (20) , интеграл в правой части проинтегрировав по частям, затем переходя к модулю получим

$$|z_{j1}| \le M_6\varepsilon \qquad (21)$$

Оценим вторые приближения

$$z_{j2} = z_{j1} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_{j2}(\sigma_j) - F_{j2}(\tilde{\sigma}_j)\right)\times$$

$$\times\left[b_{1j}(\tilde{\sigma}_j)z_{j1}^2 + \varepsilon\left(g_{1j}(\tilde{\sigma}_j, z_{11}, z_{21}) - g_{1j}(\tilde{\sigma}_j, 0,0)\right)\right]d\tilde{\sigma}_j.$$

Отсюда переходя к модулю и учитывая (21) , условие U.3 имеем

$$|z_{j2}| \le |z_{j1}| + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_{j2}(\sigma_j) - F_{j2}(\tilde{\sigma}_j)\right)\times\left[M_{01}|z_{j1}|^2 + \varepsilon M_1M_6\varepsilon\right]d\tilde{\sigma}_j \le$$

$$\le M_6\varepsilon + \varepsilon(M_{01}\cdot M_6^2 + M_1M_6)\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_{j2}(\sigma_j) - F_{j2}(\tilde{\sigma}_j)\right)d\tilde{\sigma}_j \le$$

$$\le M_6\varepsilon + \varepsilon^2M_7(M_{01}M_6^2 + M_1M_6) = (M_6 + M_7(M_{01}M_6^2 + M_1M_6)\varepsilon)\varepsilon\ .$$

ε подберем так, чтобы выполнялось неравенство

$M_6 + M_7(M_{01}M_6^2 + M_1M_6)\varepsilon \le M_8(M_8 > M_6)$ или $\varepsilon \le \frac{M_8 - M_6}{M_7(M_{01}M_6^2 + M_1M_6)}$.

Тогда

$$|z_{j2}| \le M_8\varepsilon\ . \qquad (22)$$

Далее

$$|z_{j3}| \le |z_{j1}| + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_{j2}(\sigma_j) - F_{j2}(\tilde{\sigma}_j)\right)\times\left[M_{01}{M_8}^2\varepsilon^2 + \varepsilon M_1M_6\varepsilon\right]d\tilde{\sigma}_j \le$$

$$\le M_6\varepsilon + \varepsilon^2M_7(M_{01}M_8^2 + M_1M_6) = \varepsilon\left(M_6 + \varepsilon M_7(M_{01}M_8^2 + M_1M_6)\right).$$

Пусть

$\varepsilon \le \frac{M_8 - M_6}{M_7(M_{01}M_8^2 + M_1M_6)}$.

Тогда

$$|z_{j3}| \le M_8\varepsilon \qquad (23)$$

Продолжая процесс получим

$$|z_{jm}| \le M_8\varepsilon, m = 1,2, \dots\ . \qquad (24)$$

Докажем сходимость последовательных приближений (19).

Для этой цели составим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}(z_{jm} - z_{jm-1}) \qquad (25)$$

и оценим $|z_{jm} - z_{jm-1}|$. Оценку проведем индуктивно.

При $m = 1$ имеем $|z_{j1}| \le M_8\varepsilon$.

Пусть $m = 2$, тогда

$$|z_{j2} - z_{j1}| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_{j2}(\sigma_j) - F_{j2}(\tilde{\sigma}_j)\right)\times$$

$$\times\left[M_{01}|z_{j1}|^2 + \varepsilon M_1M_8\varepsilon\right]d\tilde{\sigma}_j \le \varepsilon^2M_7(M_{01}M_8^2 + M_1M_8)\ ,$$

$$|z_{j2} - z_{j1}| \le \varepsilon^2M_7(M_{01}M_8^2 + M_1M_8) \le \varepsilon^2M_7M_8(2M_{01}M_8 + M_1)\ .$$

Если $m = 3$, то

$$|z_{j3} - z_{j2}| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_{j2}(\sigma_j) - F_{j2}(\tilde{\sigma}_j)\right)\times$$

$$\times\left(M_{01}|z_{j2} - z_{j1}|\cdot 2M_8\varepsilon + \varepsilon M_1|z_{j2} - z_{j1}|\right)d\tilde{\sigma}_j \le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2M_7(M_{01}M_8^2 + M_1M_8)(M_{01}\cdot 2M_8\varepsilon + \varepsilon M_1)\cdot\varepsilon M_7 = \varepsilon^3M_7^2M_8(2M_{01}M_8 + M_1)^2$$

$$|z_{j3} - z_{j2}| \le \varepsilon^3M_7^2M_8(2M_{01}M_8 + M_1)^2 = \varepsilon M_7M_8(\varepsilon M_7(2M_{01}M_8 + M_1)^2).$$

Далее

$$|z_{j4} - z_{j3}| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_{j2}(\sigma_j) - F_{j2}(\tilde{\sigma}_j)\right)\times$$

$$\times\left(M_{01}|z_{j3} - z_{j2}|\cdot 2M_8\varepsilon + \varepsilon M_1|z_{j3} - z_{j2}|\right)d\tilde{\sigma}_j \le$$

$$\le M_7|z_{j3} - z_{j2}|\varepsilon(2M_{01}M_8 + M_1) \le \varepsilon M_7M_8(M_7(2M_{01}M_8 + M_1)\varepsilon)^3.$$

$$\left|z_{j5}-z_{j4}\right| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma_j} exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_{j2}(\sigma_j)-F_{j2}(\tilde{\sigma}_j)\right)\times$$
$$\times\left(M_{01}\left|z_{j4}-z_{j3}\right|\cdot 2M_8\varepsilon+\varepsilon M_1\left|z_{j4}-z_{j3}\right|\right)d\tilde{\sigma}_j \le$$
$$\le M_7\left|z_{j4}-z_{j3}\right|(2M_{01}M_8+M_1)\varepsilon \le \varepsilon M_7M_8\left(\varepsilon M_7(2M_{01}M_8+M_1)\right)^4.$$

Продолжая, получим

$\left|z_{jm}-z_{jm-1}\right| \le \varepsilon M_7M_8\left(\varepsilon M_7(2M_{01}M_8+M_1)\right)^m$, $m=2,3,\dots$.

Если $\varepsilon M_7(2M_{01}M_8+M_1)<1$, то ряд (25) равномерно сходится для любого $t\in\Omega_1$(внутренняя точка) к некоторой функции $z(t,\varepsilon)$ и для этой функции справедлива оценка

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le M_8\varepsilon \qquad (26)$$

Объединив полученные оценки (14), (15), (26) имеем

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le M_9\varepsilon\ , \qquad (27)$$

где $M_9=max\{M_4,M_8\}$, $t\in\Omega_1$.

Полученная оценка (27) подтверждает, что область Ω_1 является областью притяжения решения $\xi_1(t)=colon\ (0;0)$.

Рассмотрим решение $\xi_2(t)=colon(0;-a_2(t)/b_2(t))$.

Для доказательства существования области притяжения в (1) произведем замену

$z_1(t,\varepsilon)=u_1(t,\varepsilon)$, $z_2(t,\varepsilon)=u_2(t,\varepsilon)+\xi_{22}(t)$,

где $u_j(t,\varepsilon)(j=1,2)$ — новые неизвестные функции;

$\xi_{22}(t)=-a_2(t)/b_2(t)$.

Получим систему

$$\begin{aligned}\varepsilon u_1'(t,\varepsilon)&=a_1(t)u_1(t,\varepsilon)+b_1(t)u_1^2(t,\varepsilon)+\varepsilon g_1\left(t,u_1(t,\varepsilon),u_2(t,\varepsilon)+\xi_{22}(t)\right),\\ \varepsilon u_2'(t,\varepsilon)&=-a_2(t)u_2(t,\varepsilon)+b_2(t)u_2^2(t,\varepsilon)+\varepsilon g_{21}\left(t,u_1(t,\varepsilon),u_2(t,\varepsilon)+\xi_{22}(t)\right),\end{aligned} \qquad (28)$$

где $g_{21}(t,u_1,u_2+\xi_{22})\equiv g_2(t,u_1,u_2+\xi_{22})-\varepsilon\xi_{22}'$.

Будем искать решение $u(t,\varepsilon)=colon\left(u_1(t,\varepsilon),u_2(t,\varepsilon)\right)$системы (28) удовлетворяющее условию

$$\|u(t,\varepsilon)\| \le M_{10}\varepsilon \qquad (29)$$

Задачу (28) — (29) рассмотрим для $t\in\Omega_2$.

Повторяя все вычисления приведенные в предыдущем случае доказывается, что Ω_2 является областью притяжения решения $\xi_2(t)$.

Далее произведя соответствующие замены в (1) и при соответствующих начальных условиях доказывается, что Ω_3 является областью притяжения $\xi_3(t)$, а Ω_4 для $\xi_4(t)$. Теорема доказана.

Примечание. Если $a_1(t)\equiv a_2(t)$, то область Ω линиями$\left(L_{0j}\right)$(которые совпадают) разделяется на части Ω_1 и Ω_2 . Для определенности можно взять

$$\forall t\in\Omega_1(F_{11}(t_1,t_2)\equiv F_{21}(t_1,t_2)\le 0),$$
$$\forall t\in\Omega_2(F_{11}(t_1,t_2)\equiv F_{21}(t_1,t_2)\ge 0)\ .$$

Из доказанной теоремы следует: Ω_1 — область притяжения $\xi_1(t)$, а Ω_2 - область притяжения$\xi_4(t)$. Решение $\xi_2(t),\xi_3(t)$ не имеют областей притяжения.

Примеры 1

.$a_1(t)=1, b_1(t)=1$, $a_2(t)=1$, $b_2(t)=1$.

$$F_j(t)=\int_{t_0}^{t} a_j\,(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t} d\tau=t-t_0\,, t_0=t_{01}+it_{02}$$

$ReF_j(t)=t_1-t_{01}$, $\Im mF_j(t)=t_2-t_{02}$.

Определим $\left(L_{j0}\right)$. В рассматриваемом случае (L_{10}) и (L_{20}) совпадают

$\left(L_{j0}\right)=\{t\in C|t_1-t_{01}=0\}$.

Вырожденные уравнения имеют решения

$\xi_1(t)=colon\ (0;0)$,$\xi_2(t)=colon(0;-1)$,$\xi_3(t)=colon(-1;0)$,

$\xi_4(t)=colon(-1,-1)$.

Линии $\left(L_{j0}\right)$ всю плоскость С делят на две полуплоскости

$\Omega_1=\{t\in C|t_1-t_{01}\le 0\}$, $\Omega_2=\{t\in C|t_1-t_{01}\ge 0\}$.

Согласно примечанияΩ_1 является областью притяжения решения $\xi_1(t)$, а Ω_2-область притяжения решения $\xi_4(t)$. Решения $\xi_2(t),\xi_3(t)$ не имеют областей притяжений.

2. $a_1(t)=1, b_1(t)=1$, $a_2(t)=-1$, $b_2(t)=-1$.

$F_1(t)=\int_{t_0}^{t} d\tau=t-t_0$, $F_2(t)=t-t_0$. Отсюда

$F_{11}(t_1,t_2)=t_1-t_{01}$, $F_{21}(t_1,t_2)=t_{01}-t_1$.

В этом случае также рассмотрим области Ω_1 и Ω_2.

$\forall t\in\Omega_1(F_{11}\le 0, F_{21}\ge 0)$, $\forall t\in\Omega_2(F_{11}\ge 0, F_{21}\le 0)$.

Таким образомΩ_1 - область притяжения решения $\xi_2(t)$, а Ω_2- область притяжения решения $\xi_3(t)$. Решения $\xi_1(t),\xi_4(t)$ не имеют областей притяжения.

3. $a_1(t)=2t, b_1(t)=1$, $a_2(t)=2(t-1)$, $b_2(t)=1$.

$F_1(t) = 2\int_{t_0}^{t} \tau d\tau = t^2 - t_0^2$, $F_{11}(t) = t_1^2 - t_2^2 - t_{01}^2 + t_{02}^2$.

$F_2(t) = 2\int_{t_0}^{t} (\tau - 1)d\tau = (t-1)^2 - (t_0 - 1)^2$,

$F_{21}(t) = (t_1 - 1)^2 - t_2^2 - (t_0 - 1)^2 + t_{20}^2$

Линиями (L_{0j}) являются гиперболы, проходящие через точку t_0 .

Гиперболы всю плоскость делят на четыре части Ω_j $(j = 1,2,3,4)$.

При условии $Ret_0 \ll 0$ и $Ret \le 0$, каждая из этих частей являются областями притяжения соответствующих решений $\xi_j(t)$ $(j = 1,2,3,4)$.

Литература:

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащие малые параметры при производных [Текст] /А.Н. Тихонов //Мат.сб. – 1952.-Т.31(73), №3. – С. 575-586.
2. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. [Текст] /А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов // Москва: Наука, 1973 -278с.
3. Евграфов М.А., Асимптотика решений уравнения $\omega'' - p(z,\lambda)\omega = 0$ при $\lambda \to +\infty$ в комплексной плоскостиz,[Текст] /М.А. Евграфов, М.В. Федорюк//Успехи математических наук, 21 -1966. – Т.21, №1,-С. 3-50.
4. Федорюк М.В. Асимптотика дискретного спектра оператора $w''(x) - \lambda^2 p(x) w(x)$, [Текст]/М.В. Федорюк//Матем.сб.,68(110), 1965, №1, -С. 68-97.
5. Федорюк М.В. Топология линий Стокса уравнений второго порядка,[Текст]/М.В.Федорюк//Изв. АН СССР. - Сер.матем, 29(1965), В. - 3,645-656.
6. Федорюк М.В. Метод перевала. [Текст]/М.В.Федорюк// Москва: Наука, 1977, -С. 368.
7. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости [Текст] / К.С. Алыбаев //Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001г. – С. 190-200.
8. Алыбаев К.С. Метод погранслойных линий построения регулярно и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями [Текст] /К.С.Алыбаев, К.Б. Тампагаров //Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLVIIмеждународной научно-практической конференции. № 10 (45) Россия, Новосибирск: СибАК, 2016. –С.59-66
9. Тампагаров К.Б. Погранслойные линии для сингулярно и регулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка с аналитическими функциями. [Текст] / К.Б. Тампагаров // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLVIIмеждународной научно-практической конференции. №10 (45). Россия, Новосибирск: СибАК, 2016. –С. 67-73
10. Olver. W.J Error bounds for the Liouville - Green (or WKB) approximation, [Text]/ W.J.Olver. //ProcCambridge Phil.Soc., 57-1966. –T.57.-P. 790-810.
11. Heading J. The stokes phenomenon and certain nth order differential equations,I,II,[Text] /J.Heading//Proc. CambridgePhil.Soc.,53(1957),-P. 399-441.