www.esa-conference.ru

О решении π- транцедентных задач

Мордынский Александр Анатольевич

Раздел 1.

Решение задачи № 1:

Определить значение x_1 если $\sin x_1 = x_1 - 1$ (1.0)

при у- еденицы, х – радианы.

В осях координат $x_0\, y$ имеем на графике две функции

$y_1 = x_1 - 1$; (прямая при $tg\, \alpha_1 = 1$) (1.1)

$y_2 = \sin x$; синусоида (1.2)

Точку пересечения этих двух функций обозначим « М »

с координатами $x_м = x_1$; $y_м = x_1 - 1; \Rightarrow M(x_1; x_1 - 1)$ (1.3)

При конформном сжатии оси абсцисс «х» величина тангенса наклона прямых линий непараллельных осям координат увеличивается согласно формуле: (*примечание: после сжатия оси «х», она становится осью абсцисс «z»).

$$\frac{tg\alpha_z}{tg\alpha_x} = m_z = \frac{\pi}{2} \quad (1.4.1)$$

$$tg\alpha\ m_z = m_z\ tg\alpha_x = \frac{\pi}{2}\ tg\alpha_x \quad (1.4.2)$$

$$\text{при } tg\alpha_x = \frac{y}{z}; \quad (1.5.0)$$

$$\Rightarrow \text{из (1.4.1): } \frac{\frac{y}{z}}{\frac{y}{x}} == \frac{y}{z} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{z} = m_z;$$

$$\text{или } \frac{x}{z} = m_z = \frac{\pi}{2} \quad (1.5.1)$$

$$\chi = \frac{\pi}{2} \cdot Z \quad (1.6.1)$$

$\Rightarrow$

$$Z = \frac{x}{\frac{\pi}{2}} -= \frac{2}{\pi} \cdot x \quad (1.6.2)$$

или $x = m_z \cdot Z$

$$Z = \frac{x}{m_z} \quad (1.7.1)$$

$$\text{при } \frac{x}{z} > 1 \text{ сжатии x} \quad (1.7.2)$$

Тогда формула прямой линии y_1 в осях координат $z_0\, y$

$$\text{станет: } y_1 = \frac{\pi}{2}\ Z_1 - 1; \quad (1.8)$$

а для точки пересечения «М» следует:

$$y_M = \frac{\pi}{2} \cdot Z_M - 1 \quad (1.9)$$

Учитывая, что преобразование координат происходит при $y = \text{const}$, делаем вывод, что величина ординаты точки «М» сохраняется т.е.:

$$y_M = x_1 - 1 = \text{const} \quad (1.10)$$

Поясним выбор масштаба преобразования оси абсцисс« x » в ось « z »

$m_z = \frac{\pi}{2}$ (сжатие в $\frac{\pi}{2}$ раз)

это выполнено для того, чтобы:

1.) синусоида $y_2(x) = \sin x$ превратилась в полуокружности с радиусами $R = y_{max} = 1$, т.к. ось Z стала в $\frac{\pi}{2}$ раз короче оси x

2.) наклонная прямая $y_1 = x - 1 = 1 \cdot x - 1$ т.е. при $tg\alpha_{1(x)} = 1$; (в осях $x_0 y$) или

$$y_1(x) = (tg\alpha_x) \cdot x - 1 \qquad (2.1)$$

стала бы прямой и в осях $z_0 y$

$$y = \frac{\pi}{2} \cdot z - 1 = (tg\alpha_z) \cdot z - 1; \qquad (2.2)$$

У полученной из синусоиды ($y = \sin x$ в осях $x_0 y$) линии состоящей из смыкающихся полуокружностей (в осях $z_0 y$)

$$\text{при } y_{c_i} = 0 = \text{const} \qquad (2.3)$$

Абсцисса центра первой полуокружности

$$z_{c_1} = 1 \qquad (2.4)$$

Формулы окружностей в осях $z_0 y$ будут

$$(z - z_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \qquad (2.5)$$

или при $y_{c_i} = 0 = \text{const}$ следует для точки пересечения «М» полуокружности с прямой

$$(z - z_c)^2 + (y + 0)^2 = R^2 = 1^2 = 1 \qquad (2.6)$$

$$\text{или } (z - z_c) + y^2 = 1 \qquad (2.7)$$

Т.к. ордината y точки «М» сохранилась исходя из условия преобразования $y = \text{const}$, то при $z_c = 1$ для первой (полу)окружности получим уравнение:

$$y_M^2 + (z_M - 1)^2 = 1 \qquad (2.8)$$

Из условия $y_M = \text{const} = (x_1 - 1)$ для величины $(z_M - 1)$

$$\text{получим: } (z_M - 1) = \frac{2}{\pi} x_M - 1 = \frac{2}{\pi} x_1 - 1 = \frac{2x_1 - \pi}{\pi} \qquad (2.9)$$

Исходя из (2.9) получим уравнение из которого и определиться решение данной задачи:

$$(x_1 - 1)^2 + \left(\frac{2x_1 - \pi}{\pi}\right)^2 = 1 \qquad (2.10)$$

После преобразования (2.10) следует:

$$\pi^2 (x_1 - 1)^2 + (2x_1 - \pi)^2 = 1 \qquad (2.11)$$

Сопоставим полученное в (2.11) уравнение с формулой уравнения второй степени

$$ax^2 + вx + c = 0 \qquad (3.0)$$

$$\text{где } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \qquad (3.1)$$

преобразуем (2.11) в виде

$$(4 + \pi^2) x_1^2 + 2\pi(2 + \pi) x_1^1 + \pi^2 = 0 \qquad (3.2)$$

$$\text{получим: что при } \pi = 3{,}141593... \qquad (3.3)$$

$$a = (4 + \pi^2) = 13{,}869606... \qquad (3.4.1)$$

$$-в = 2\pi (2 + \pi) = 32{,}305584... \qquad (3.4.2)$$

$$c = \pi^2 = 9{,}869606... \qquad (3.4.3)$$

при этом для формулы (3.1) следует:

$$2a = 27{,}739212... \qquad (3.5.1)$$

$$4ac = 547{,}5502...* \qquad (3.5.2)$$

$$в^2 = 1043{,}6507...* \qquad (3.5.3)$$

$$D = \sqrt{в^2 - 4ac} = \sqrt{496{,}1005...} = 22{,}2733\,* \qquad (3.5.4)$$

примечание *: точность вычисления приведенного в данном тексте, ограничивалась точностью, полученной с помощью 8-ми значного калькулятора «citizen», а так же использованием только 4-х значных таблиц тригонометрических функций.

Из вычисленных данных следует:

$$x_1 = \frac{54{,}578897}{27{,}739212} = 1{,}967512... \approx 75°21' \qquad (3.6)$$

На графичеслой схеме преобразования этой задачи в осях z_0y видно, что формула для уравнения (2.10) составлена из прямоугольного треугольника, в котором

$$\cos\beta = x_1 - 1 = 0{,}9675\,** \qquad (3.7.1)$$

тогда следует, что

$$\sin\beta = \frac{2x_1 - \pi}{\pi} = 0{,}252596 \qquad (3.7.2)$$

Для (3.7.1) и (3.7.2) выполним проверку согласно формуле

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \qquad (3.8.0)$$

$$\begin{aligned} &0{,}9675^2 + 0{,}252596^2 = \\ &= 0{,}9361949 + 0{,}0638047 = \\ &= 0{,}9999996 = 1 - 4\cdot 10^{-7} \end{aligned} \qquad (3.8.1)$$

Т.о. в полученных вычислениях величина абсолютной погрешности $\Delta = 4\cdot 10^{-7}$ превышает точность принимавшихся значений величин $\sin$ или $\cos$ исходя из 4-х значных таблиц:

исходя из $\sin\ \beta = \dfrac{2x_1 - \pi}{\pi} = 0{,}252591$

примем $\sin\ \beta = 0{,}252596$, тогда $\beta^{\,o} \approx 14{,}39'$ (3.9)

Решение задачи № 2

Найти корень уравнения $\sin\ x_0 = \dfrac{x_0}{2}$ (где x_0 - радианы)

Эта задача подобрана таким образом, чтобы показать разницу при аналитическом решении в двух задачах, у которых корни уравнения при приближенных методах решения получаются одинаковыми. Если же задачи №1 и №2 решать приближенными методами, то в обоих случаях получим одинаковый результат.

Решение в задаче №2 проведем по одинаковой схеме, как и в Задаче №1. Условно будем считать эту схему решения схемой №1:

1) конформное сжатие оси абсцисс x в ось z с масштабом $m_z = \dfrac{x}{z} = \dfrac{\pi}{2}$

2) применение в уравнении окружности формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$основное условие преобразования осей координат $x_0 y$ в оси $z_0 y$

$$y = const \qquad (1.0)$$

по аналогии примем

$$\frac{z}{x} = \frac{2}{\pi} = m_z \qquad (1.1)$$

из чего следует:

$$x = \frac{\pi}{2}\cdot z \qquad (1.2.1)$$

или $z = \dfrac{2}{\pi}\cdot x$ (1.2.2)

Преобразовав синусоиду (в осях x_0y) в полуокружности (в осях z_0y) с радиусами (полу)окружностей R=1, отметим, что:

ординаты центров окружностей (или полуокружностей) $y_{c_i} = 0 = const$

т.е. центры находятся на оси z .

Из схемы решения на эскизах видно, что координаты первой окружности (для центра) будут:

$$c_1(1;0) \Rightarrow \begin{cases} z_{c_1} = 1 & (1.3.1) \\ y_{c_1} = 0 & (1.3.2) \end{cases}$$

тогда формула для первой (полу)окружности запишется в осях $z_0 y$ в виде:

$$(z-1)^2 + y^2 = R^2 = 1^2 = 1 \quad (1.4)$$

Из задачи $\sin x_0 = \frac{x_0}{2} = \frac{1}{2}\ x_0$ получим две функции:

$$\begin{cases} y_1(x) = \sin x - синусоида & (1.5.1) \\ y_2(x) = \frac{1}{2}x = (tg\alpha_2)x - прямая \quad линия & (1.5.2) \end{cases}$$

При изменении координат на $z_0 y$ учтем изменения угла наклона согласно формуле:

$$tg\alpha_2(z) = \frac{tg\alpha_1(x)}{m_z} \quad (1.6.1)$$

при $tg\alpha_x = \frac{1}{2}$ (1.6.2)

и при $m_z = \frac{2}{\pi}$ (1.6.3)

следуем: $tg\alpha_z = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{4};$ (1.6.4)

тогда в осях $z_0 y$ формула прямой линии станет:

$$y = (tg\alpha_z)\cdot z = \frac{\pi}{4}\cdot z \quad (1.7)$$

Если ординату точки пересечения $"M_1"$ считать постоянной, то следует:

$$y_{м_1} = \frac{x_0}{2} = const \quad (1.8)$$

уравнение для точки $"M_1"$ лежащей на (полу)окружности будет:

$$(z_{m_1} - z_c)^2 + (y_{m_1} - y_c)^2 = R^2 = 1^2 = 1 \quad (1.9)$$

или при $z_{c_1} = 1$ и $y_{c_1} = 0$ получим:

$$(z_{m_1} - 1)^2 + (y_{m_1} - 0)^2 = 1 \quad (1.10)$$

или $(z-1)^2 + (\frac{x_0}{2})^2 = 1$ (1.11)

преобразуем величину $(z-1)$ при условии $z = \frac{2}{\pi}\cdot x$ следует

$$(z-1) = (\frac{2}{\pi}x - 1) = \frac{2x-\pi}{\pi} \quad (1.12)$$

после чего получим формулу для уравнения задачи исходя из точки пересечения $"M_1"$ прямой с (полу)окружностью

$$\left(\frac{2x_0-\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{2}\right)^2 = 1 \quad (1.13)$$

из которой получим уравнение

$$4(2x_0-\pi)^2 + \pi^2 x_0{}^2 = 4\pi^2 \quad (2.0)$$

или после преобразования следует:

$$(16+\pi^2)x_0{}^2 = 4\pi\cdot x_0 \quad (2.1.1)$$

или $(16+\pi^2)x_0 = 4\pi$ (2.1.2)

из чего следует: $x_0 = \frac{4\pi}{16+\pi^2}$ (2.1.3)

Вычисляя при $\pi = 3{,}141593$ получим:

$$x_0 = \frac{12{,}566372}{25{,}869606} = 0{,}485758 \quad (2.1.4)$$

тогда $\frac{x_0}{2} = 0{,}242879$ (2.2)

или $\sin\alpha_3 = 14^o 39'$* (2.3)

(по 4-х значным тригонометрическим таблицам $\sin$ *)**

Полученный результат согласно графического эскиза решения задачи в осях $z_0 y$ дает из прямоугольного треугольника:

$$\beta^o = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_3\right) = 90^o - \alpha_3 = \quad (2.4)$$

$$= 90^o - 14^o 39' \approx 75^o 21'$$

или $(x_0)^o = (180^o - \beta^o) = (90^o + \alpha_3{}^o) = 104^o 39'$

а при приближенном методе решения получим результат равный

$\approx \frac{7}{12}\pi \approx 105^o$.

Анализ решения задач № 1 и № 2.

При сравнении величин синусов полученных в двух решениях, отметим их неравенство:

$$0{,}252596 \neq 0{,}242879 \quad (1.0)$$

Объединение графических эскизов в преобразованных координатах $z_0 y$ проведем согласно формулы:

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2} \quad (1.1)$$

или $$\sin\frac{x-y}{2} = \frac{\sin x - \sin y}{2\cos\frac{x+y}{2}} = \frac{0{,}09717}{2\cdot 0{,}97} = 0{,}0050087 \quad (1.2)$$

Результат (1.2) соответствует углу $\approx 4'$ (четыре угловых минуты). Разумеется что такая малая угловая величина ни графически, ни приближенным методом недостижима, а поэтому аналитический способ решения π - трацедентных задач (с применением в исходном уравнении тригонометрических функций) имеет важное значение для получения точных результатов.

Задача№ 3

Найти решение уравнения!

$\cos 2x_1 = (x_1 - x)$; где y -в единицах (1.0)

x - в радианах

Представляем на начальном этапе графическое изображение двух функций в осях координат $x_0 y$:

$$\begin{cases} y_1 = \cos 2x; \begin{pmatrix} \textit{сжатая} \\ \textit{косинусоида} \end{pmatrix} & (1.1) \\ y_2 = x - 1; \begin{pmatrix} \textit{прямая} \\ \textit{линия} \end{pmatrix} & (1.2) \end{cases}$$

Далее применим две схемы решения:

1-я схема: $a_1)$ растяжение оси x до получения $y = \cos S$ (при y=const) нормальной косинусоиды в осях $S_0 y$

$в_1)$ сжатие оси S в $\frac{\pi}{2}$ раз до получения из косинусоиды в осях $S_0 y$ полуокружностей с радиусом R=1 в осях $t_0 y$.

$c_1)$ составление и решение уравнения на базе $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

2-я схема: $a_2)$ сжатие оси y до оси j для получения косинусоиды с амплитудой $|j_{\max}| = \pm\frac{1}{2}$

$в_2)$ сжатие оси x до оси z для получения полуокружностей из пропорциональной (т.е. уменьшенной) косинусоиды, при этом радиус полуокружности будет $R = \frac{1}{2} = const$ и ценры полуокружности будут находиться на оси z .

$c_2)$ составление уравнения в $z_0 j$ для решения на базе свойства прямоугольного треугольника с гипотенузой равной $R = \frac{1}{2}$ по формуле $(z - z_c)^2 + (j - j_c)^2 = R^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Решение по схеме №1: *(при y=const)*

Исследуем свойства двух функций

$$\begin{cases} y_1 = \cos 2x & (1.1) \\ y_2 = x-1 & (1.2) \end{cases}$$

в точке их пересечения «М» с координатами: $x_M = 2x_1; y_M = (x_1 - 1)$ (1.3.0)

Для этого отметим, что угол наклона прямой (1.2) определяется из:

$$y_2 = x - 1 = 1 \cdot x - 1 = (tg\alpha_2) \cdot x - 1 \quad (1.3.1)$$

$$или \Rightarrow tg\alpha_2 = 1 = const \quad (1.4)$$

Для получения вместо сжатой косинусоиды $y = \cos 2x$ в осях $x_0 y$ нормальной косинусоиды $y = \cos S$ в осях $S_0 y$ произведем растяжение оси x до оси z, соответственно в 2 раза:

$$\text{т.е. при} \begin{cases} S = 2x & (1.5) \\ x = \dfrac{S}{2} & (1.6) \end{cases}$$

$$\text{при масштабе } m_S = \frac{x}{S} = \frac{1}{2} \quad (1.7)$$

*(отметим что расстояние оси x можно записать как $m_S = 2^{-1}$)

или для углов наклона прямых линий не параллельных осям координат отметим уменьшение тангенсов угла наклона в 2 раза, т.е.

$$\text{из } tg\alpha_x = \frac{y}{x} \quad (1.8.1)$$

$$\Rightarrow tg\alpha_x = \frac{y}{S} \quad (1.8.2)$$

$$\frac{tg\alpha_S}{tg\alpha_x} = \frac{\frac{y}{S}}{\frac{y}{x}} = \frac{\frac{y}{2x}}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2} = m_S \quad (1.9)$$

Т.о. можно переписать формулы двух функций (1.1) и (1.2) для осей координат $S_0 y$ в виде:

$$y_1 = \cos S \quad (2.1)$$

$$y_2 = \frac{S}{2} - 1 \quad (2.2)$$

координаты точки пересечения «М» в осях $S_0 y$ можно записать

$$\begin{cases} y_M = (x_1 - 1) = const & (2.3.1) \\ S_M = 2x_M = 2(2x_1) = 4x_1 & (2.3.2) \end{cases}$$

Сожмем абсциссу S до абсциссы t для получения из нормальной* косинусоиды в осях $S_0 y$ полуокружностей в осях $t_0 y$ с радиусом R=1, и центрами на оси абсцисс t.

Примечание: *(для нормальной тригонометрической функции, в данной задаче – нормальной косинусоидной, будем считать два условия:

1) симметрия относительно оси абсцисс:

например: $y = \cos x$ или $y = \sin x$

2) пропорциональное отношение между $y_{max} = 1$ (для $\sin x$ или $\cos x$) при шаге периода равном 2π такое условие можно записать как:

пропорциональность с масштабом пропорции

$$m_p = 1:1). \quad (2.3.3)$$

Масштаб сжатия в $\frac{\pi}{2}$ раз можно записать, как отношение тангенсов углов наклона для одной и той же прямой:

$$\frac{tg\alpha_t}{tg\alpha_S} = \frac{\frac{y}{t}}{\frac{y}{S}} = \frac{S}{t} = m_t = \frac{2}{\pi} \quad (3.0)$$

или следует $\begin{cases} t = \dfrac{\pi S}{2} & (3.1) \\ S = \dfrac{2t}{\pi} & (3.2) \end{cases}$

Для прямой линии

$$y = \begin{vmatrix} x-1 \\ x_0 y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}S-1 \\ S_0 y \end{vmatrix} = \frac{\pi}{4} \cdot t - 1 \qquad (4.1)$$

произойдет увеличение тангенса угла наклона в $\dfrac{\pi}{2}$ раз

т.е. $\dfrac{1}{m_t}$ раз, т.к. $\dfrac{1}{m_t} = \dfrac{1}{\frac{2}{\pi}} = \dfrac{\pi}{2}$

$$tg\alpha_t = \frac{tg\alpha_S}{m_t} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{4} \qquad (4.2)$$

Полученные (полу)окружности имеют центры, лежащие на оси абсцисс t, т.е. при

$$y_{c_i} = 0 = const \qquad (4.3)$$

Радиус (полу)окружностей полученных из нормальной косинусоиды всегда равен

$$R = 1 = const \qquad (4.4)$$

поэтому из уравнения окружности в осях $t_0 y$

$$(y - y_c)^2 + (t - t_c)^2 = R^2 \qquad (4.5)$$

при $y_c = 0$ можно записать:

$$y^2 + (t - t_c)^2 = 1^2 = 1 \qquad (4.6)$$

Для второй (полу)окружности полученной из нормальной косинусоиды имеем абсциссу ее центра

$$\begin{cases} t_{c_2} = 2 & (4.7) \\ при y_{c_2} = 0 & ((4.3)) \end{cases}$$

и тогда (4.6) можно переписать:

$$y^2 + (t-2)^2 = 1 \qquad (4.8)$$

преобразуем $t = \varphi(x)$ через

$$при \quad \begin{cases} t = \dfrac{2S}{\pi} = \dfrac{4x}{\pi} & (4.9) \\ S = 2x & ((1.5)) \end{cases}$$

или для точки пересечения «М» запишем

$$t_M = \frac{4x_1}{\pi} \qquad (4.10)$$

тогда величина $(t_M - 2)$ станет

$$(t_M - 2) = \left(\frac{4x_1}{\pi} - 2\right) = \frac{4x_1 - 2\pi}{\pi} = \frac{2(2x_1 - \pi)}{\pi} \qquad (4.11)$$

формула для решения задачи по первой схеме станет

$$(x_1 - 1)^2 + \left[\frac{2(2x_1 - \pi)}{\pi}\right]^2 = 1 \qquad (5.1)$$

$$при \quad y_M = (x_1 - 1) = const \qquad ((2.3.1))$$

после преобразования получим уравнение второй степени:

$$(\pi^2 + 16)x_1^2 - 2\pi(\pi + 8)x_1 + 4\pi^2 = 0 \qquad (6.1)$$

или для $ax^2 + вx + c = 0$ следует:

$$a=\left(\pi^2+16\right)=25{,}869606 \qquad (6.2.1)$$
$$в=-70{,}0047 \qquad (6.2.2)$$
$$c=4\pi^2=39{,}478424 \qquad (6.2.3)$$
$$2a=51{,}739212 \qquad (6.2.4)$$
$$в^2=4900{,}658 \qquad (6.2.5)$$
$$4ac=4085{,}1649 \qquad (6.2.6)$$
$$\sqrt{в^2-4ac}=\sqrt{815{,}4931}=22{,}556839... \qquad (6.2.7)$$
$$\text{тогда} \Rightarrow x_1=\frac{98{,}561539}{51{,}739212}=1{,}9049679 \qquad (7.1)$$
$$\sin\beta=\frac{2x_1-\pi}{\pi}=0{,}212747 \qquad (7.2)$$

из таблиц синусоидов следует:

$$\beta\approx 12°17' \qquad (7.3)$$
$$\text{поэтому } (2x_1)=(90°+\beta)=102°17' \qquad (7.4)$$
$$\text{или } (2x_1)=1{,}78510...\text{ радиан} \qquad (7.5)$$
$$\Rightarrow x_1=0{,}89255...\text{ радиан (ответ).} \qquad (7.6)$$

Решение по схеме №2.

Произведем сжатие оси ординат y до оси ординат j для получения пропорциональной косинусоиды с масштабом $m_p(1:2)$ т.е. с амплитудой косинусоиды $|j_{\max}|=\pm\frac{1}{2}ед$? масштаб сжатия $при\ x=const$ будет:

$$m_j=\frac{tg\alpha_j}{tg\alpha_y}=\frac{\frac{j}{x}}{\frac{y}{x}}=\frac{j}{y}=\frac{1}{2} \qquad (1.1)$$

$$\text{или } j=\frac{1}{2}y=\frac{y}{2} \qquad (1.2)$$

$$y=2j \qquad (1.3)$$

В осях координат $x_0 j$ получим уравнения для двух линий

$$\begin{cases} j_1=\frac{1}{2}\cos 2x & (2.1)\\ j_2=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & (2.2)\end{cases}$$

Для координат точки пересечения этих линий «М» запишем:

$$x_M=2x_1=const \qquad (3.1)$$
$$j_M=\frac{y_M}{2}=\frac{x_1-1}{2} \qquad (3.2)$$

Затем произведем сжатие оси абсцисс x до оси абсцисс z для получения из пропорционально сжатой косинусоиды $m_p(1:2)$ полуокружностей с радиусами

$$R=\frac{1}{2}=const \qquad (4.1)$$

и координатами центров (полу)окружностей, лежащими на оси абсцисс z т.е. при

$$j_{c_i}=0=const \qquad (4.2)$$

Масштаб сжатия оси абсцисс определяется соотношением:

$$m_z=\frac{tg\alpha_z}{tg\alpha_x}=\frac{\frac{j}{z}}{\frac{x}{z}}=\frac{z}{x}=\frac{2}{\pi} \qquad (5.1)$$

$$\text{или} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{2x}{\pi} & (5.2) \\ x = \dfrac{\pi z}{2} & (5.3) \end{cases}$$

при сжатии оси абсцисс величина тангенса наклона прямой линии, не параллельной осям координат, увеличится в $\frac{\pi}{2}$ раз и станет для прямой $j_2 = \left(\frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}$:

$$tg\alpha_z = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \qquad (6.1)$$

координаты точки пересечения «М» при пересчете получатся:

$$\begin{cases} j_M = \dfrac{x_1 - 1}{2} = const(при \quad j = const) & (7.1) \\ z_M = \dfrac{x_M}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2x_M}{\pi} = \dfrac{2(2x_1)}{\pi} = \dfrac{4x_1}{\pi} & (7.2) \end{cases}$$

Из графика в осях $j_0 z$ видно, что точка пересечения «М» лежит на второй (полу)окружности и принадлежит двум функциям:

$$1) \quad j_1 = \frac{\pi}{4}\frac{z}{} - \frac{1}{2} \qquad (8.1)$$

$$2) \quad {j_2}^2 - (z-1)^2 = R^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad (8.2)$$

Подсчитаем величину $(z-1)$:

$$(z-1) = \frac{2x}{\pi} - 1 = \frac{2x - \pi}{\pi} \qquad (8.3)$$

и получим формулу точки пересечения «М»:

$$\left(\frac{2x_1 - \pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad (8.4)$$

$$4(2x_1 - \pi)^2 + \pi^2(x_1 - 1)^2 = \pi^2 \qquad (8.5)$$

после преобразования получим уравнение для решения задачи:

$$(\pi^2 + 16){x_1}^2 - 2\pi(\pi + 8)x_1 + 4\pi^2 = 0 \qquad (8.6)$$

Т.о. видим что при обеих схемах решения, уравнения получены одинаковые. Точность вычисления может быть повышена при использовании более подробных таблиц тригонометрических функций и при применении компьютера. Целью автора в настоящих работах было лишь изучение схем решения π - трацедентных задач.

Обобщение решения π-трансцедентных уравнений

В общем виде представим решение π-трансцедентных уравнений в координатах $\tilde{o}_0 \acute{o}$ для уравнения следующего вида: найти корень (корни) уравнения

$$\sin\frac{1}{A} \cdot x_0 = Bx_0 + C_i$$

Для этого представим уравнение в виде двух функций в осях $x_0 y$:

$$y_1 = \left(\sin\frac{1}{A}x_0\right) = \sin\frac{1}{A}x$$

$$y_2 = (Bx_0 + C) = Bx + C$$

Отметим, что в зависимости от величины $\frac{1}{\grave{A}}$ при $\frac{1}{\grave{A}} = 1$ т.е. при $\grave{A} = 1$ <u>для синусоиды</u> $\sin\frac{1}{A}x = \sin\frac{x}{A}$ обязательна деформация относительно оси x: сжатие при $\grave{A} > 1$ или растяжение при $\grave{A} < 1$

Следовательно для получения нормальной (или пропорциональной синусоиды) необходимо соответственно для оси абсцисс растяжение в $\grave{A}$ раз, или сжатие в $\grave{A}$ раз оси x до оси z.

В соответствии с деформацией синусоиды выполняется Конформное преобразование по переменной x в переменную z.

Правилом определения конформного преобразования служит поведение непараллельных осям координат прямых, т.е.

изменение величины тангенса наклона прямых при перемене координат от $\tilde{o}_0 \acute{o}$ до $z_0 y$: при сжатии абсциссы x угол наклона в координатах $z_0 y$ становится больше.

$$\begin{cases} tg\alpha_x = \dfrac{y}{x} \langle tg\alpha_z = \dfrac{y}{z} \\ \text{ï ðè ñæ àò èè } \tilde{o} \Rightarrow (\acute{o} = const) \end{cases}$$

т.е. $\dfrac{tg\alpha_z}{tg\alpha_x} = \dfrac{x}{z} = m_z \rangle 1$

или $\begin{cases} tg\alpha_x = \dfrac{y}{x} \rangle tg\alpha_z = \dfrac{y}{z} \\ \text{ï ðè ðàñò ÿæ åí èè } \tilde{o} \Rightarrow (\acute{o} = const) \end{cases}$

т.е. $\dfrac{tg\alpha_z}{tg\alpha_x} = \dfrac{x}{z} = m_z \langle 1$

Обратная картина наблюдается при конформном преобразовании переменной y, т.е. при деформации оси ординат y в ось j:

при $\begin{matrix} tg\alpha_y = \dfrac{y}{x} \\ tg\alpha_j = \dfrac{j}{x} \end{matrix}$ следует:

$$\begin{cases} \dfrac{tg\alpha_j}{tg\alpha_y} = \dfrac{\frac{j}{x}}{\frac{y}{x}} = \dfrac{j}{y} = m_j \langle 1 \\ \text{ï ðè ñæ àò èè } \acute{o} \Rightarrow \hat{a} \text{ î ñü } j(\tilde{o} = const) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{tg\alpha_j}{tg\alpha_y} = \dfrac{\frac{j}{x}}{\frac{y}{x}} = \dfrac{j}{y} = m_j \rangle 1 \\ \text{ï ðè ðàñò ÿæ åí èè } \acute{o} \Rightarrow \hat{a} \text{ î ñü } j(\tilde{o} = const) \end{cases}$$

Вывод:

первоочередное преобразование для π-трансцендентных задач – это получение нормальных или пропорциональных тригонометрических функций.

Следующее преобразование – сжатие оси абсцисс в $\dfrac{\pi}{2}$ раз для получения из нормальной (или пропорциональной) тригонометрической функции полуокружностей переходящих одна в другую – всегда является обязательным и одинаковым. Тогда точка пересечения прямой с (полу)окружностью в конформно-преобразованных координатах даст формулу, из которой можно получить уравнение для решения задачи.

Особо можно сказать о точности получаемого решения. Точность аналитического решения π-трансцендентных задач зависит от двух факторов:

1) точности применяемых таблиц тригонометрических функций
2) количества знаков после запятой при вычислении детерминала в уравнении второго порядка, т.к. точность $\ddot{A} = \sqrt{\hat{a}^2 - 4\grave{a}\tilde{n}}$ всегда будет не выше $\dfrac{1}{2}$ знаков набранных после запятой в $(\hat{a}^2 - 4\grave{a}\tilde{n})$ т.е. точность получения числа при его извлечении из корня квадратного зависит от числа набранных знаков.

Эта величина, в свою очередь, зависит от первоначально принятого значения числа π:

π = 3,14
π = 3,141
π = 3,1415
π = 3,14159.... и т.д.

Соответственно такая же точность должна быть и для других не целых чисел типа: $\begin{matrix} \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{2} \end{matrix}$ т.е. $\sqrt[n]{\grave{a}}$