

УДК 539.19

Анализ и исследование дисперсионного уравнения распространения поверхностных волн на заряженной поверхности электропроводной жидкости

Егерва Эльвира Николаевна
Мишина Юлия Александровна

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева

Аннотация. Рассматривается математическая модель неустойчивости волн на заряженной поверхности цилиндрического столба электропроводной жидкости, окружающей длинное пористое ядро. Полученное дисперсионное уравнение исследовано численно как для симметрических возмущений $m=0$, так и для несимметрических $m \geq 1$ возмущений. Подробно исследованы зависимости декремента затухания и частоты колебаний волн от параметров, входящих в условие задачи.

Данная работа носит теоретический характер, однако, её результаты можно применить и во многих технологических процессах.

Ключевые слова: цилиндрический столб жидкости, пористое ядро, заряженная поверхность, электропроводная жидкость, дисперсионное соотношение, частота колебаний волны, декремент затухания колебаний волны.

Annotation. A mathematical model of wave instability on a charged surface of a cylindrical column of an electricaly conductive liquid surrounding a long porous core is considered. The resulting dispersion equation has been studied numerically for both symmetric perturbations $m = 0$ and asymmetric $m \geq 1$ perturbations. Dependences of the damping decrement and the frequency of wave oscillations on the parameters entering the condition of the problem are studied in detail.

This work is of a theoretical nature, however, its results can be applied in many technological processes.

Keywords: Cylindrical liquid column, porous core, charged surface, conductive liquid, dispersion relation, frequency of wave oscillations, damping decrement of wave oscillations.

Постановка задачи. Рассматривается распространение бегущих затухающих волн по заряженной поверхности цилиндрического объема электропроводной жидкости, внутри которого находится коаксиально расположенное цилиндрическое ядро из пористого материала (Рис.1)

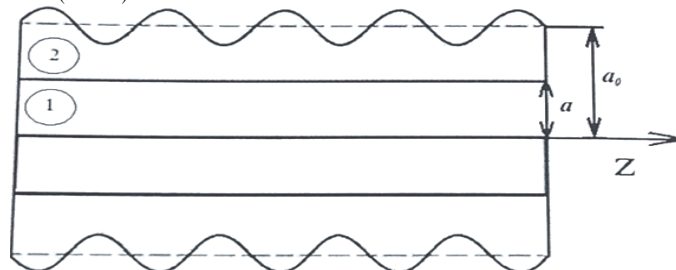


Рис.1

Влиянием окружающего воздуха на распространение волн пренебрегается. Учитывается наличие поверхностного натяжения. Сила тяжести предполагается отсутствующей. Ось пористого цилиндра совпадает с осью коаксиального цилиндрического конденсатора, к электродам которого приложена разность потенциалов. Внутренним электродом является поверхность проводящей жидкости. Задача решается в цилиндрической системе координат, в которой жидкий столб покоится.

Уравнения движения электропроводной жидкости в пористой среде при условии, что напряженность электрического поля $\vec{E} = 0$, имеют вид [1,6]

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -grad p_1 - \frac{\eta}{K} \vec{u}_1, div \vec{u}_1 = 0. (1)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, Γ – пористость, η - вязкость, K – коэффициент проницаемости пористой среды, p_1 - давление, \vec{u}_1 – макроскопическая скорость.

Уравнения движения свободной жидкости при отсутствии электрического поля [4] можно записать в линейном виде

$$\rho \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} = -grad p_2, div \vec{u}_2 = 0. (2)$$

Здесь \vec{u}_2 – скорость свободной жидкости. Ограничиваемся случаем волн достаточно большой длины λ , существенно превышающей радиус жидкого столба, с тем, чтобы пренебречь слагаемыми, содержащими $\Delta \vec{u}_1$ и $\Delta \vec{u}_2$ в первых уравнениях системы (1) и (2).

Уравнения для электрического поля в воздухе [1,6]

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0, \operatorname{div}(\varepsilon \bar{E}) = 0, (3)$$

где $\bar{E} = \text{const}$ – диэлектрическая проницаемость среды, окружающей жидкость.

Предполагая движение жидкости потенциальным, из уравнений (1) – (3) находим:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 = \nabla \varphi_1, \bar{u}_2 = \nabla \varphi_2, \bar{E} = -\nabla \Phi \\ \Delta \varphi_1(r, \theta, z, t) = 0, \Delta \varphi_2(r, \theta, z, t) = 0, \Delta \Phi(r, \theta, z, t) = 0 \end{aligned} (4)$$

Отметим, что уравнения (1 и 2) допускают потенциальность поля скоростей.

Уравнение Лапласа для произвольной функции $f(r, \theta, z)$ в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\Delta f \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Потенциал Φ запишем в виде $\Phi = \Phi_0(r) + \Phi_w(r, \theta, z, t)$, где Φ_w – малое возмущение, связанное с волной; Φ_0 – потенциал невозмущенного электрического поля. Для нахождения Φ_0 имеем уравнение Лапласа $\Delta \Phi_0 = 0$ с граничными условиями $\Phi_0(a_0) = V, \Phi_0(b) = 0$, которое имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi_0}{dr} \right) = 0.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение два раза, получим

$$\Phi_0(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2.$$

Отсюда с учетом граничных условий находим:

$$\Phi_0(a_0) = C_1 \cdot \ln a_0 + C_2 = V;$$

$$\Phi_0(b) = C_1 \cdot \ln b + C_2 = 0.$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{V}{\ln(a_0/b)}, C_2 = -\frac{V \cdot \ln b}{\ln(a_0/b)}.$$

Выражение для $\Phi_0(r)$, принимает вид

$$\Phi_0(r) = \frac{V \cdot \ln r/b}{\ln(a_0/b)}.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} E_0(r) = -\frac{d\Phi_0(r)}{dr} = -\frac{(1/r)V}{\ln(a_0/b)}, E_0(a_0) = \frac{V/a_0}{\ln(b/a_0)}, (5) \\ \frac{d^2\Phi_0(r)}{dr^2} = -\frac{V/r^2}{\ln(a_0/b)}; \left. \frac{d^2\Phi_0(r)}{dr^2} \right|_{a_0} = -\frac{V/a_0^2}{\ln(a_0/b)}. \end{aligned}$$

Для плотности поверхностного заряда имеем:

$$4\pi\sigma_0 = \varepsilon E_0(a_0), \text{ или } 4\pi\sigma_0 = \varepsilon V/[a_0 \ln(b/a_0)].$$

Здесь σ_0 – невозмущенная плотность поверхностного заряда, $E_0(r)$ – невозмущенное поле. Возмущенную плотность заряда запишем в виде $\sigma = \sigma_0 + \sigma_w$, где σ_w – возмущение, связанное с волной. Возмущенное поле записываем в виде $\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_w$, где $\bar{E}_w = -\nabla \Phi_w$ и $\Delta \Phi_w = 0$. На Φ_w налагаем граничные условия на возмущенной поверхности жидкости $r = a_0 + \xi$ и внешнем электроде $r=b$

$$\Phi_0(a_0 + \xi) + \Phi_w = V = \text{const}, \Phi_w(b) = 0. (6)$$

Граничные условия на поверхностях раздела имеют вид [5]

1) На границе пористой среды при $r = a$:

$$u_{1r} = u_{2r}.$$

2) На этой же границе при $r = a$: (7)

$$p_1 = p_2.$$

3) На свободной поверхности жидкости при $r = a_0 + \xi$:

$$u_{2r} = \frac{d\xi}{dt}.$$

4) На этой же поверхности при $r = a_0 + \xi$:

$$\Phi_0(a_0 + \xi) + \Phi_w = V = \text{const}.$$

5) Условие баланса сил на свободной поверхности при $r = a_0 + \xi$

$$\frac{\varepsilon E_n^2}{8\pi} + p_2 - p_a = 2\alpha H.$$

6) На внешнем электроде $r = b$:

$$\Phi_w(b) = 0.$$

Кроме того, скорость \bar{u}_1 жидкости на оси пористого цилиндра (при $r = 0$) должна быть конечной. Здесь p_a – постоянное атмосферное давление, α – коэффициент поверхностного натяжения, H – средняя кривизна поверхности, $E_n = (\bar{E}_0 + \bar{E}_w) \cdot \bar{n}$. Давления запишем в виде $p_1 = p_{10} + p_{1w}$, $p_2 = p_{20} + p_{2w}$, где p_{10} , p_{20} – равновесные давления при отсутствии волн, а p_{1w} , p_{2w} – возмущения давлений.

Дисперсионное уравнение для поверхностных волн, кубическое относительно γ , имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma^3 \rho^2 [A_{1m} I_m(ka) - \Gamma A_{2m} I'_m(ka)] - \gamma^2 \rho \frac{\eta}{K} \Gamma A_{1m} I_m(ka) + \\ + \gamma \rho L k [A_{4m} I_m(ka) - \Gamma A_{3m} I'_m(ka)] - kL \frac{\eta}{K} \Gamma A_{4m} I_m(ka) = 0, (8) \end{aligned}$$

где

$$A_{1m} = I_m(ka_0)K_m'(ka) - I_m'(ka)K_m(ka_0),$$

$$A_{2m} = I_m(ka_0)K_m(ka) - I_m(ka)K_m(ka_0),$$

$$A_{3m} = A = I_m(ka_0)K_m(ka) - I_m(ka)K_m'(ka_0),$$

$$A_{4m} = I_m'(ka_0)K_m'(ka) - I_m'(ka)K_m'(ka_0),$$

$$L_m = \frac{\varepsilon}{4\pi a_0} E_0^2 \left[1 + \frac{ka_0 K_m'(ka_0)}{K_m(ka_0)} \right] - \frac{\alpha}{a_0^2} (1 - m^2 - k^2 a_0^2).$$

Конкретные числовые расчеты при решении дисперсионного уравнения (8) проводились для следующих значений параметров: $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\alpha = 73 \text{ г/с}^2$,

$$\eta = 0,01 \text{ г/см} \cdot \text{с}, \Gamma = 0,8, K = 0,02 \text{ см}^2, 0 < k < 2 \text{ см}^{-1}, \varepsilon = 1, 0 \leq E_0 \leq 50 \text{ ед. (1 ед. СГС} = 300 \text{ вольт/см)}.$$

Для симметричных возмущений ($m=0$) и значений $a=0,1 \text{ см}$, $a_0 = 1,1 \text{ см}$, $0 \leq E_0 \leq 30 \text{ ед. СГС}$ интервал $0 < k < 2 \text{ см}^{-1}$ делится критической точкой k_c ($\lambda_c = 2\pi/k_c$), [1] которая находится из условия $Q = 0$, на два интервала:

В интервале $0 < k < k_c$ волны отсутствуют: происходит нарастание возмущений ($\beta < 0$).

В интервале $k_{1c} < k < k_{2c}$ происходит аperiodическое движение с нарастающей амплитудой, приводящее к образованию капель.

В таблице 1 приведены значения k_c и k_m в зависимости от E_0 для $a=0,1 \text{ см}$, $a_0 = 1,1 \text{ см}$, $m=0$. При $E_0=35$ и 40 ед. СГС даны два значения k_c (k_{1c} - первая строка, k_{2c} - вторая строка).

Таблица 1. Значения волновых чисел k_c (см^{-1}) и k_m (см^{-1}) в зависимости от напряженности электрического поля E_0 при $a_0 = 1,1 \text{ см}$, $m=0$

E_0	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
k_c	0,909	0,915	0,934	0,968	1,024	1,112	1,246	0,046 1,444	0,145 1,722	0,233	0,299
k_m	0,634	0,640	0,653	0,681	0,730	0,800	0,900	1,100	1,300	1,520	1,830

Литература:

1. Гершуни Г.З. Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости – М. : Наука – 392с.
2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости /Пер. с англ. Под ред.А.Т. Ильичева – М. : Физмалит, 2005. – 288с.
3. Курочкина С.А. Нелинейные периодические волны в тонких поверхностно заряженных слоях жидкости. Роль испарения и диссипации. 2010. – 184с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика: Учебное пособие. Т. 6 Гидродинамика. – М. : Физмалит, 2006. – 736с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика: Учебное пособие. Т. 8 Электродинамика сплошных сред. – М. : Физмалит, 2005. – 656с.
6. Столяров И.В., Тактаров Н.Г. Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании // Известия МЖГ, 1987. – №5. – с.183-186.