ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www. esa-conference.ru

УДК 517.95

О совпадении собственных значений двух задачи Дирихле

Косбергенова Марина Сайлаубаевна, преподаватель
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека

Аннотация. *В данной работе рассматривается вопрос о совпадении спектров двух эллиптических операторов второго порядка.*
Ключевые слова: *собственное значение, собственный вектор, эллиптический оператор.*

Summary. *The coincidence of spectra of two elliptic operators of the second-order are proved.*
Keywords: *eigenvalue, eigenvector, elliptic operator.*

Рассмотрим следующие ограниченные области в R^N, $N \geq 2$

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in R^N : (Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j < 1 \right\} \tag{1}$$

$$G = \left\{ y = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in R^N : (By, y) = \sum_{l,m=1}^{N} b_{lm} y_l y_m < 1 \right\} \tag{2}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ и $b_{lm} = b_{ml}$ - произвольные действительные постоянные такие, что (Ax, x) и (By, y) являются положительно определенными квадратичными формами.

Пусть $A(D)$ и $B(D)$ соответствующие этим формам дифференциальные операторы второго порядка соответственно в области G и в области Ω, т.е.

$$A(D)\vartheta(y) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 \vartheta(y)}{\partial y_i \partial y_j}, \qquad y \in G \tag{3}$$

$$B(D)u(x) = \sum_{l,m=1}^{N} b_{lm} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_l \partial x_m}, \qquad x \in \Omega \tag{4}$$

Рассмотрим следующие две задачи на собственные значения

$$\begin{cases} A(D)\vartheta(y) + \lambda \vartheta(y) = 0, \quad y \in G \\ \vartheta\big|_{\partial G} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} B(D)u(x) + \mu u(x) = 0, \quad x \in \Omega \\ u\big|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Пусть $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ и $\{\vartheta_n\}$, $\{u_n\}$ - соответственно собственные значения и полные ортонормированные системы собственных функций соответствующих задач (5) и (6).

В настоящей работе получен следующий результат:

Теорема. Пусть α_i и β_j, $j = \overline{1, N}$ собственные значения соответственно матриц $\{a_{ij}\}$ и $\{b_{lm}\}$ с учетом кратности. Тогда найдется линейное преобразование $x = Ty$ пространства $x = Sy$ в R^N приводящее форму (Bx, x) к диагональному виду, т.е.

$$(Bx, x) = (BSy, y) = (S'BSy, y) = \sum_{l=1}^{N} \beta_l^2 y_l^2$$

где β_l - определяются из соотношения

$$\beta_{lm} = \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} s_{il} s_{jm} = \begin{cases} \beta_l^2 & l = m, \\ 0 & l \neq m. \end{cases}$$

Лемма 1. Положим $W(y)=u(Sy)$, где $u(x)\in C^2(\Omega)$, тогда

$$B(D)u(x)=\sum_{l=1}^{N}\beta_l^2\frac{\partial^2 W(y)}{\partial y_l^2},\qquad x=Sy. \tag{7}$$

Доказательство леммы 1. Так как $S^{-1}=S'$, где S' - транспонированная матрица, то $y=S'x$ и $\frac{\partial y_l}{\partial x_i}=s_{il}$. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial W}{\partial y_l}\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_i}=\sum_{l=1}^{N}s_{il}\frac{\partial W}{\partial y_l},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{m=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial^2 W}{\partial y_l\partial y_m}\cdot s_{il}s_{jm}.$$

Следовательно,

$$B(D)u(x)=\sum_{i,j=1}^{N}b_{ij}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{m,l=1}^{N}\left[\sum_{i,j=1}^{N}b_{ij}\cdot s_{il}\cdot s_{jm}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial y_l\partial y_m}=\sum_{l=1}^{N}\beta_l^2\frac{\partial^2 W(y)}{\partial y_l^2}.$$

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим теперь следующее линейное преобразование $R_\beta:R^N\to R^N$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_N)$, причем $y=R_\beta z$ означает что $y_j=\beta_j\cdot z,\ j=\overline{1,N}$. Тогда очевидно, что $R_\beta=R_\beta^*$ и якобиан преобразования равен $\prod_{j=1}^{N}\beta_j$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Положим $W_1(z)=W(R_\beta z)=u(SR_\beta z)$, где $u(x)\in C^2(\Omega)$. Тогда для $x=SR_\beta z$

$$B(D)u(x)=\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial^2 W_1(z)}{\partial z_l^2} \tag{8}$$

где S - ортогональное преобразование из леммы1.

Доказательство леммы 2. Положим $y=R_\beta z$ т.е. $y_l=\beta_l z_l$. Тогда $\frac{\partial z_l}{\partial y_l}=\frac{1}{\beta_l}$. Поэтому из леммы 1 вытекает

$$B(D)u(x)=\sum_{l=1}^{N}\beta_l^2\frac{\partial^2 W(y)}{\partial y_l^2}=\sum_{l=1}^{N}\beta_l^2\frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial W(y)}{\partial y_l}\right]=$$

$$=\sum_{l=1}^{N}\beta_l^2\frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial W_1}{\partial z_l}\cdot\frac{1}{\beta_l}\right]=\sum_{l=1}^{N}\beta_l^2\frac{\partial^2 W_1(y)}{\partial z_l^2}\cdot\frac{1}{\beta_l}=\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial^2 W_1(z)}{\partial z_l^2}.$$

Лемма 2 доказана.

Теперь выясним какой вид обретет форма (Ax,x) при замене переменных $x=SR_\beta z$:

$$(Ax,x)=(ASR_\beta z,SR_\beta z)=(R_\beta S'ASR_\beta z,z). \tag{9}$$

Положим $C=R_\beta S'ASR_\beta$. Тогда в силу невырожденности произведенных преобразований форма $(Cz,z)=(Ax,x)$ положительно определена и найдется ортогональное преобразование $z=Qt$, с матрицей $\{q_{ij}\}$ приводящее эту форму к диагональному виду, т.е.

$$(Cz,z)=(Q'CQt,t)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2 t_j^2$$

где $\alpha_{lm}=\sum_{i,j=1}^{N}c_{ij}q_{il}q_{jm}=\begin{cases}\alpha_l^2, & l=m\\ 0, & l\neq m\end{cases}$

Лемма 3. Положим $x = SR_\beta QR_\alpha^{-1}t\ W_2(t) = W_1(QR_\alpha^{-1}t) = W(R_\beta QR_\alpha^{-1}t) = u(SR_\beta QR_\alpha^{-1}t)$, где $u(x) \in C^2(\Omega)$. Тогда $(Ax,x) = \sum_{j=1}^{N} t_j^2$,

$$B(D)u(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_l^2 \frac{\partial^2 W_2(t)}{\partial t_j^2}. \tag{10}$$

Доказательство леммы 3. Легко видеть что достаточно доказать равенство (10). В силу леммы 2 и из инвариантности оператора Лапласа относительно ортогональных преобразований (см. [2]) получим

$$B(D)u(x) = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l^2 \frac{\partial^2 W_1(z)}{\partial z_l^2} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2 \frac{\partial^2 W_2(t)}{\partial t_j^2}.$$

Лемма 3 доказана.

Теперь произведем замену переменных $t = Q'R_\beta S'y$ и положим

$$\vartheta(y) = \left(\prod_{j=1}^{N} \sqrt{\alpha_j}^{-1} \beta_j\right) \cdot W_2(Q'R_\beta S'y) = \left(\prod_{j=1}^{N} \sqrt{\alpha_j}^{-1} \beta_j\right) \cdot u(SR_\beta QR_\alpha^{-1}Q'R_\beta S'y). \tag{11}$$

Лемма 4. Положим $x = SR_\beta QR_\alpha^{-1}Q'R_\beta S'y$ и пусть $\vartheta(y)$ и $u(x)$ соотношением (11) где $u(x) \in C^2(\Omega)$. Тогда

$$(Ax,x) = (By,y), \tag{12}$$

$$B(D)u(x) = A(D)\vartheta(y)\left(\prod_{j=1}^{N} \sqrt{\alpha_j}\beta_j^{-1}\right). \tag{13}$$

Доказательство леммы 4. Сначала докажем равенство (12)

$$(Ax,x) = \sum_{j=1}^{N} t_j^2 = (t,t) = (Q'R_\beta S'y, Q'R_\beta S'y) = (Q'R_\beta S'y, Q'R_\beta S'y) =$$

$$= (S'BSS'y, S'y) = (By,y).$$

Таким образом, $(Ax,x) = (By,y)$. Покажем теперь справедливость равенства (13). Положим $t = Q'z$, т.е. $z_k = \sum_{k=1}^{N} q_{kp} t_p$, $k = 1,2, \ldots, N$ Поэтому

$$\frac{\partial W_2}{\partial t_l} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial W_2}{\partial z_k} q_{kl}, \quad \frac{\partial^2 W_2}{\partial t_l \partial t_m} = \sum_{p,k=1}^{N} \frac{\partial^2 W_2}{\partial z_p \partial z_k} q_{kl} q_{pm}.$$

Учитывая, теперь равенства $Q'Q = QQ' = 1$ получим

$$B(D)u(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2 \frac{\partial^2 W_2(t)}{\partial t_j^2} = \sum_{l,m=1}^{N} \alpha_{lm} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t_l \partial t_m} = \sum_{l,m=1}^{N} \left(\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} q_{il} q_{jm}\right) \frac{\partial^2 W_2}{\partial t_l \partial t_m} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \left(\sum_{l,m=1}^{N} q_{il} q_{jm} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t_l \partial t_m}\right) = \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \sum_{p,k=1}^{N} \frac{\partial^2 W_2}{\partial z_p \partial z_k} \cdot \left(\sum_{l=1}^{N} q_{il} q_{kl}\right)\left(\sum_{m=1}^{N} q_{im} q_{pm}\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \frac{\partial^2 W_2}{\partial z_i \partial z_j}$$

Так как $z = R_\beta S'y$, то $y = SR_\beta^{-1}z$, т.е. $y_l = \sum_{j=1}^{N} (SR_\beta^{-1})_{lj} z_j$. Поэтому

$$\frac{\partial W_2}{\partial z_j} = \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial W_2}{\partial y_l} (SR_\beta^{-1})_{lj},$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial z_j \partial z_l} = \sum_{l,m=1}^{N} \frac{\partial W_2}{\partial y_l \partial y_m} (SR_\beta^{-1})_{lj} (SR_\beta^{-1})_{mi}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \frac{\partial^2 W_2}{\partial z_i \partial z_j} = \sum_{l,m=1}^{N} \frac{\partial W_2}{\partial y_l \partial y_m} \left(\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \left(SR_\beta^{-1}\right)_{lj} \left(SR_\beta^{-1}\right)_{mi} \right) =$$

$$= \sum_{l,m=1}^{N} \frac{\partial W_2}{\partial y_l \partial y_m} \left(\sum_{i,j=1}^{N} \left(SR_\beta^{-1}\right)_{mi} c_{ij} \left(SR_\beta^{-1}\right)'_{jl} \right).$$

Из определения C получим

$$SR_\beta^{-1} C \left(SR_\beta^{-1}\right)' = SR_\beta^{-1} C R_\beta^{-1} S' = SR_\beta^{-1} R_\beta S' A S R_\beta R_\beta^{-1} S' = A.$$

Поэтому

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \frac{\partial^2 W_2}{\partial z_i \partial z_j} = \sum_{l,m=1}^{N} a_{lm} \frac{\partial W_2}{\partial y_l \partial y_m}.$$

Таким образом,

$$B(D)u(x) = A(D)W_2 = \left(\prod_{j=1}^{N} \sqrt{\alpha_j} \beta_j^{-1} \right) A(D) \vartheta(y).$$

Лемма 4 доказана.

Определим линейное преобразования $T : G \to \Omega$ следующим образом:

$$x = Ty = SR_\beta Q R_\alpha^{-1} Q' R_\beta S' y, \quad y \in G \tag{14}$$

и пусть

$$\vartheta(y) = \left(\prod_{j=1}^{N} \sqrt{\alpha_j} \beta_j^{-1} \right) u(Ty). \tag{15}$$

Очевидно, что якобиан преобразования T равен $\prod_{j=1}^{N} \sqrt{\alpha_j} \beta_j^{-1}$ и кроме того

$$\vartheta\big|_{\partial G} = \left(\prod_{j=1}^{N} \sqrt{\alpha_j} \beta_j^{-1} \right) u\Big|_{\partial\Omega} \tag{16}$$

Лемма 5. Пусть $u_1(x), u_2(x) \in L_2(\Omega)$, тогда для соответствующих функций $\vartheta_1(y), \vartheta_2(y) \in L_2(G)$ справедливо равенство

$$\int_G \vartheta_1(y) \overline{\vartheta_2(y)} dy = \int_\Omega u_1(x) \overline{u_2(x)} dx. (17)$$

Доказательство леммы 5. По определению (14) преобразования T получим

$$\int_\Omega u_1(x) \overline{u_2(x)} dx = \int_G \vartheta_1(Ty) \overline{\vartheta_2(Ty)} \left(\prod_{j=1}^{N} \alpha_j^{-1} \beta_j^2 \right) dy = \int_G \vartheta_1(y) \overline{\vartheta_2(y)} dy.$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы: Доказательство непосредственно следует из лемм 4 и 5, а также принципа минимакса для собственных значений данных задач (5) и (6).

Теорема доказана.

Литература:

1. А.Р. Халмухамедов. О совпадении спектров двух эллиптических операторов второго порядка. ДАН РУз. 1994, N 7, стр. 7-9.

2. Р.Курант. Д.Гильберт. Методы математической физики. т. I-II, М., 1946.