www.esa-conference.ru

УДК 532.591
ББК 22.365

Волны на поверхности проводящей жидкости с поверхностным электрическим зарядом, находящейся на пористой среде

Егерева Эльвира Николаевна, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики
Королева Валентина Сергеевна, студентка 1 курса факультета Биотехнологии и биологии
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарёва
г. Саранск

Аннотация. *Эффекты, возникающие в жидкостях, взаимодействующих с электрическим полем и находящемся на слое пористой среды, часто встречаются во многих природных процессах, в частности, связанных с движением грунтовых вод, а также различных биологических жидкостей в живых организмах.*

Решена задача о распространении волн на поверхности проводящей жидкости с поверхностным электрическим зарядом , находящимся на пористой среде. Получено дисперсионное уравнение для комплексного декремента затухания волны. Рассмотрен частный случай малой толщины пористого слоя и слоя свободной жидкости. Исследовали зависимость и построили график зависимости декремента затухания колебаний волн от напряженности магнитного поля, при различных значениях волнового числа.

Ключевые слова: *Волны на заряженной поверхности, пористое основание, дисперсионное уравнение декремент затухания колебаний волны, уравнение Дарси, уравнение Эйлера.*

Рассмотрим распространение волн по заряженной поверхности жидкого проводника. Проводящая жидкость находится на неизменяющемся пористом основании, ограниченном снизу твердым электропроводным дном.

Декартову систему координат $Oxyz$ задаем так, что ось Oz направлена вертикально вверх против вектора g ускорения свободного падения, а оси Ox и Oy лежат на поверхности раздела жидкости и пористой среды. Толщину слоя воздуха над жидкостью далее будем представлять бесконечно большой.

Известно [1], что в случае электростатического равновесия заряды проводников концентрируются в очень тонком слое на поверхности проводника.

Поскольку вектор $\bar{E}$ электрической напряженности внутри проводника равен нулю, то поток этого вектора через замкнутую поверхность, находящуюся внутри проводника тоже равна нулю. Значит и заряд находящийся внутри любой такой поверхности равен нулю. Это означает, что в случае электростатического равновесия заряды внутри проводников отсутствуют и располагаются только на поверхности.

Так как внутри проводников поле отсутствует, т.е. $\bar{E} = 0$, то для зарядов, находящихся на поверхности проводника, используется выражение:

$$\varepsilon \mathrm{E}_n = 4\pi\sigma$$

Здесь E- напряженность электрического поля в близости от поверхности проводника, $E_n = \bar{E} \cdot \bar{n}$, $\bar{n}$- внешняя нормаль к поверхности проводника, σ- поверхностная плотность электрического заряда, ε=const – диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

Уравнение движения электропроводной жидкости в пористой среде при условии $\bar{\mathrm{E}}$=0 запишем в виде:

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial t} = -grad p_1 + \rho\bar{g} - \frac{\eta}{K}\bar{u}_1,\ \mathrm{div}\,\bar{u}_1 = 0. \qquad (1.1.1)$$

Здесь ρ-плотность жидкости, Г- пористость среды, ρ_1- давление, $\bar{u}_1$-макроскопическая скорость фильтрации ,η- вязкость, K- коэффициент проницаемости пористой среды.

Предполагая, что амплитуда волны значительно меньше ее длины[2], уравнение движения свободной жидкости при $\bar{\mathrm{E}}$=0 запишем в линейном приближении:

$$\rho\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = -grad p_2 + \rho\bar{g},\ \mathrm{div}\,\bar{u}_2 = 0. \qquad (1.1.2)$$

где $\bar{u}_2$- скорость жидкости, ρ_2- давление .

Уравнение для электрического поля в атмосфере(область 3):

$$rot\bar{E} = 0,\ \mathrm{div}\bar{E}=0. \qquad (1.1.3)$$

Возьмем течение жидкости в области 2 потенциальным, запишем

$$\bar{u}_2 = grad\varphi(x, y.z, t), \qquad (1.1.4)$$

где $\varphi(x, y.z, t)$-потенциал скорости, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi(x, y.z, t) = 0.$$

Из первого уравнения (1.1.1) находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\rho_2 - gz.$$

Из уравнений (1.1.3) следует, что $\bar{\mathrm{E}} = -grad\psi$, где ψ- потенциал электрического поля, удовлетворяющий уравнению Лапласа.

Система граничных условий на поверхностях раздела имеет вид:

www.esa-conference.ru

1) $u_{1z} = 0$ при z= $-h_1$(на дне),
2) u_{1z}=u_{2z} при z=0 (на поверхности пористой среды),
3) $p_1 = p_2$,при z=0; (1.1.5)
На свободной поверхности жидкости с уравнением $z = h_2 + \xi(x, y, t)$:
4) u_{2z}=$\frac{\partial\xi}{\partial t}$,
5) $\bar{E}_\tau = \bar{E} - \bar{n}E_n = 0$ или $\psi = C_0 = const$,
6) $p_{ij}n_in_j + p_2 = 2\alpha H, p_{ij} = -p_a\delta_{ij} + \frac{\varepsilon E_iE_j}{4\pi} - \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\delta_{ij}$,
7) $\psi_w = 0$ при z→+∞

Здесь $\bar{n}$-нормаль к поверхности, H- средняя кривизна поверхности, p_a-постоянное давление в атмосфере, p_{ij}-тензор механических напряжений в области 3, α-коэффициент поверхностного натяжения. Величина σ находится из условия $\sigma = \varepsilon E_n/4\pi$.В линейном приближении $\bar{n} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\bar{e}_1 - \frac{\partial\xi}{\partial y}\bar{e}_2 + \bar{e}_3$,где $\bar{e}_1, \bar{e}_2\bar{e}_3$- ,базисные векторы системы координат $Oxyz$.

Переменные величины записываем в виде:
$p_1 = p_{10}(z) + p_{1w}$, $p_2 = p_{20}(z) + p_{2w}$,
$\psi = \psi_0(z) + \psi_w$, $\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_w$, ($\bar{E}_w = -grad\psi_w$), σ=$\sigma_0 + \sigma_w$. (1.1.9)
Потенциалы ψ_0 и ψ_w удовлетворяют уравнениям Лапласа $\Delta\psi_0 = 0$, $\Delta\psi_w = 0$.

Здесь индексом «0» отмечены равновесные (т.е. при отсутствии волн) величины, а индексом «w»- малые возмущения соответствующих величин, связанные с волновым движением.

В равенствах (1.1.6):
$\bar{E}_0 = E_{0z}\bar{e}_3, \psi_0 = -E_{0z} + C, \sigma_0 = \varepsilon E_{0z}/4\pi, \sigma_w = \varepsilon E_{wz}/4\pi$. (1.1.7)
$p_{10}(z) = -\rho gz + C_1, p_{20}(z) = -\rho gz + C_2$, $C_1 = C_2 = \rho gh_2 + p_a - \frac{\varepsilon E_0^2}{8\pi}$.
Выбирая C= $C_0 + E_{0z}h_2$, условие 5 в системе (1.1.5), можно записать в виде: $-E_{0z}\xi + \psi_w = 0$.
Из условия 6 системы (1.1.5) следует в линейном приближении:
$-\frac{\varepsilon E_{0z}}{4\pi}\frac{\partial\psi_w}{\partial z} + p_{2w} - \rho g\xi = -\alpha\Delta_2\xi$. (1.1.8)
Здесь $\Delta_2\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$. При выводе (1.1.8) учитывается, что $E_n = (\bar{E}_0 + \bar{E}_w)\bar{n} = E_{0z} - \frac{\partial\psi_w}{\partial z}$ в линейном приближении.

В результате упрощения система (1.1.5) вместе с условием на бесконечности принимает в линейном приближении вид:
1) $u_{1z} = 0$ $(z = -h_1)$,
2) $u_{1z} = u_{2z}$ $(z = 0)$,
3) $p_{1w} = p_{2w}$ $(z = 0)$,
4) $u_{2z} = \frac{\partial\xi}{\partial t}$ $(z = -h_2)$,
5) $-E_{0z}\xi + \psi_w = 0 (z = -h_2)$,
6) $-\frac{1}{4\pi}\varepsilon E_{0z}\frac{\partial\psi_w}{\partial z}p_{2w} - \rho g\xi = -\alpha\Delta_2\xi$ $(z = h_2)$,
7) $\psi_w = 0$ $(z \to +\infty)$.
Здесь $p_{2w} = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ в условии 6 (см.§2).Все малые высших порядков отбрасываются.

2.Вывод дисперсионного уравнения

Применяя к первому уравнению (1.1.1) преобразования, получим:
$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_{1z} = -\frac{\eta}{K}u_{1z}$ (1.2.1)

В связи с тем, что при отсутствии волн (в равновесии) выполняется равенства : $0 = -\nabla p_{10}(z) + \rho\bar{g}$, $0 = -\nabla p_{20}(z) + \rho\bar{g}$,
Первые уравнения в (1.1.1) и (1.1.2) принимают вид:
1) $\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_{1w} - \frac{\eta}{K}\bar{u}_1$,
2) $\rho\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_{2w}$. (1.2.2)
Из второго уравнения (1.2.2) следует, в частности, $p_{2w} = -\frac{\rho\partial\varphi}{\partial t}$.
Из уравнений (1.2.2) находим
$\Delta_2 p_{1w} = \frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t\partial z} + \frac{\eta}{K}\frac{\partial u_{1z}}{\partial z}$, $\Delta_2 p_{2w}$=$\rho\frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t\partial z}$. (1.2.3)
Из граничного условия 3 в системе (1.1.9) следует:
$\Delta_2 p_{1w} = \Delta_2 p_{2w}$.
Отсюда, с учетом уравнений (1.2.3), будем иметь
$\rho\frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t\partial z} = \frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t\partial z} + \frac{\eta}{K}\frac{\partial u_{1z}}{\partial z}$. (1.2.4)
С учетом вышеизложенного система трех уравнений для нахождения φ, ψ_w, u_{1z} принимает окончательный вид:
1) $\Delta\varphi = 0$, 2) $\Delta\psi_w = 0$, 3) $\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t} = -\frac{\eta}{K}\Delta u_{1z}$. (1.2.5)
Граничные условия (1.1.9) запишутся с учетом $u_{2z} = \partial\varphi/\partial z$ окончательно запишутся в виде:

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

1) $u_{1z} = 0\ (z = -h_1)$,
2) $u_{2z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\ (z = 0)$,
3) $\rho\frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t\partial z} = \frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t\partial z} + \frac{\eta}{K}\frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\ (z = 0)$,
4) $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial t}\ (z = h_2)$,
5) $-E_{0z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_w}{\partial t} = 0 (z = h_2)$,
6) $-\frac{1}{4\pi}\varepsilon E_{0z}\frac{\partial^2\psi_w}{\partial t\partial z}p_{2w} - \rho g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\alpha\Delta_2\frac{\partial\varphi}{\partial z} (z = h_2)$,
7) $\psi_w = 0\ (z \to +\infty)$.

Решение уравнений (1.2.5) с граничными условиями (1.2.6) ищем в виде бегущих затухающих волн:

$$\varphi(x,y,z,t) = \hat\varphi(z)\exp[-\gamma t + i(k_1x + k_2y)],$$
$$\psi_w(x,y,z,t) = \hat\psi(z)\exp[-\gamma t + i(k_1x + k_2y)], \quad (1.2.7)$$
$$u_{1z}(x,y,z,t) = \hat u(z)\exp[-\gamma t + i(k_1x + k_2y)]\,,$$

Здесь $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i, \beta = \gamma_r -$коэффициент затухания волны, $\omega = |\gamma_i| -$частота волны.

Подставляя функции (1.2.7) в уравнения (1.2.5), получим систему дифференциальных уравнений для амплитуд $\hat\varphi(z), \hat\psi(z), \hat u(z)$:

1) $\hat\varphi''(z) - k^2\hat\varphi = 0$,
2) $\hat\psi''(z) - k^2\hat\psi = 0$,

$$\left(\gamma - \frac{\eta\Gamma}{\rho K}\right)[\hat u'' - k^2\hat u] = 0 \quad (1.2.8)$$

Здесь $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

Граничные условия для амплитуд получаются из (1.2.8):

1) $\hat u = 0\ (z = -h_1)$,
2) $\hat u = \hat\varphi'\ (z = 0)$,
3) $(\frac{\rho}{\Gamma}\gamma - \frac{\eta}{K})\hat u' = \rho\gamma\hat\varphi'\ (z = 0)$, (1.2.9)
4) $\xi = \int\frac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial z}\Big|z = h_2\ dt$ (уравнение для нахождения функции $\xi(x,y,z)$,
5) $E_{0z}\hat\varphi' + \gamma\hat\varphi = 0\ (z = h_2)$,
6) $\rho[g\hat\varphi' + \gamma^2\hat\varphi] - \frac{1}{4\pi}\varepsilon E_{0z}\gamma\hat\psi' + \alpha k^2\hat\varphi' = 0\ (z = h_2)$,
7) $\hat\psi = 0\ (z \to +\infty)$.

Общее решение системы (1.2.8) имеет вид:

$$\hat u = C_1\exp(-kz) + C_2\exp(kz),$$
$$\hat\varphi = C_3\exp(-kz) + C_4\exp(kz), \quad (1.2.10)$$
$$\hat\psi = C_5\exp(-kz) + C_6\exp(kz),$$

Где $C_n\ (n = 1,\dots,6) -$ произвольные постоянные.

Следует положить $C_6 = 0$ для выполнения условия 7 в (1.2.9). Подставляя формулы (1.2.10) в условия 1-3 и 5-6 системы (1.2.9), получим однородную систему пяти алгебраических уравнений, линейных относительно неизвестных постоянных $C_n\ (n = 1,\dots,5)$, которая имеет ненулевое решение только при обращении в нуль определителя системы:

1) $C_1\exp(2kh_1) + C_2 = 0$;
2) $C_1 + C_2 = -kC_3 + kC_4$;
3) $kC_1\left(\frac{\rho\gamma}{\Gamma} - \frac{\eta}{K}\right) - kC_2\left(\frac{\rho\gamma}{\Gamma} - \frac{\eta}{K}\right) + \rho\gamma k^2(C_3 + C_4) = 0$;
4) $kC_3E_{0z} - kC_4E_{0z}\exp(2kh_2) - \gamma C_5 = 0$;
5) $(-k\rho g + \rho\gamma^2 - \alpha k^3)C_3 + (k\rho g + \rho\gamma^2 + \alpha k^3)C_4\exp(2kh_2) + \frac{1}{4\pi}\varepsilon E_{0z}\gamma kC_5 = 0$.

Примечание. В системе (1.2.9*) нумерация формул совпадает с их нумерацией в системе (1.2.9). Уравнение 4 в (1.2.9) используется для нахождения формы свободной поверхности жидкости.

Получившееся дисперсионное уравнение приравниваем к нулю определителя системы (1.2.9*), принимает вид:

$$\gamma^3\rho^2\left(a_1b_1 + \frac{a_2b_2}{\Gamma}\right) - \gamma^2\frac{\eta}{K}\rho a_2b_2 - \gamma\rho\left(a_2b_1 + \frac{a_1b_2}{\Gamma}\right)G + \frac{\eta}{K}a_1b_2G = 0, \quad (1.2.11)$$

Где $G = k\rho g + k^3\alpha - \frac{\varepsilon E_0^2k^2}{4\pi}\ (E_0 \equiv |E_{0z}|)$,
$a_1 = 1 - \exp(2kh_2)\,, a_2 = 1 + \exp(2kh_2)$,
$b_1 = 1 - \exp(2kh_1)\,, b_2 = 1 + \exp(2kh_1)$,

Для нахождения формы свободной поверхности, определяемой уравнением $z = \xi(x,y,z,t)$, при помощи формулы 4 в (1.2.9) получаем выражение:

$$\xi(x,y,z) = \int\frac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial z}|z = h_2\ dt = \int\hat\varphi'(\gamma t + i(k_1x + k_2y)\Big|z = h_2\ dt = -\frac{\exp[-\gamma t + i(k_1x + k_2y)]}{\gamma}\hat\varphi'(h_2),$$

Где $\hat\varphi'(h_2) = -kC_1\exp(-kh_2) + kC_2\exp(kh_2)$.

Отметим, что в предельном случае $\Gamma \to 1. \frac{\eta}{K} \to 0$ (при отсутствии электрического поля, т.е. $\bar E = 0$) из уравнения (1.2.11) следует дисперсионное уравнение для волн на слое жидкости конечной глубины $h_1 + h_2$ с непроницаемым дном.[3]

$$\omega^2 = gktk(h_1 + h_2).$$

Предельный переход $\Gamma \to 1, \frac{\eta}{K} \to 0$ соответствует замене пористой среды слоем идеальной жидкости. При этом уравнение Дарси (1.1.1) переходит в уравнение Эйлера (1.1.2) для идеальной жидкости, а третье граничное условие в (1.2.9) удовлетворяет тождественную в силу второго.

Выясним предельный вид дисперсионного уравнения (1.2.11) при $h_1 \to 0$ $(\bar{E} = 0)$. Очевидно, что при $h_1 \to 0$ должны выполняться условия $u_{1x} \to 0$,

$u_{1x} \to 0$. Физический смысл этих условий заключается в том, что фильтрацию в тонком слое можно рассматривать как течение Пуазейля в плоскопараллельной щели толщиной h_1,а поэтому скорость фильтрации (средний расход на единицу толщины) будет порядка$\sim h_1^2$. Из уравнения непрерывности div$\bar{u}_1 = 0$ следует, что $\frac{\partial u_{1z}}{\partial z} \to 0$ при $h_1 \to 0$. Далее, поскольку $\hat{\varphi}''(z) \neq 0$ при $z = 0$, из третьего условия в (1.2.9) следует, что при $z = 0$

$$\left(\frac{\rho}{\Gamma}\gamma - \frac{\eta}{K}\right)\hat{u}`(z) \neq 0.$$

Для выполнения этого условия необходимо потребовать, чтобы $K \to 0$, т.к. $\hat{u}`(z) = 0$. Нетрудно проверить, что при $h_1 \to 0, K \to 0$ уравнение (1.2.11) (при $\bar{E} = 0$) принимает вид :

$$\omega^2 = gkth(kh_2).$$

Из уравнения Дарси (1.1.1) при $K \to 0$ следует $\bar{u}_1 \to 0$ (замена пористой среды сплошным твердым телом).

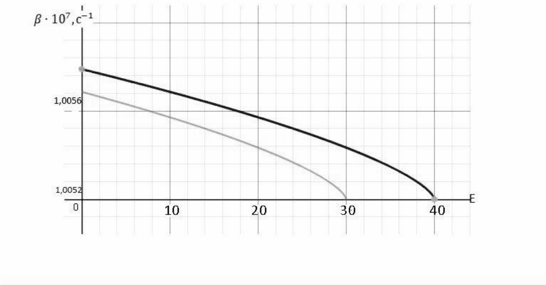

Рис.1 **Зависимость декремента затухания колебания волны от напряженности магнитного поля,**

Построен график зависимости величины β от E при фиксированных значениях волнового числа $k = 0{,}006$ см$^{-1}$, толщины слоя пористой среды $h_1 = 2$ см ;4см толщины слоя свободной жидкости $h_2 = 2$ см; 4см. Видно, что значения β уменьшаются с ростом E.

Литература:

1.Тамм И.Е. Основы теории электричества. –М,:Наука,1976. –616 с.

2.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие в 10т. Т VI. Гидродинамика.–М: Физматлит, 2006.–736 с.

3.Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М: Наука, 1977.–816 с.