ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Ещё одно определение нормальной матрицы

Илюшечкин Никита Васильевич, инженер
ОАО «Концерн «Моринформсистема – Агат», г. Москва

Рассматривается объём параллелепипеда, натянутого на функции от квадратной комплексной матрицы, определённые на её спектре. Приводятся неулучшаемые оценки снизу для квадрата этого объёма через сумму квадратов модулей определителей, элементы которых являются значениями заданных функций от собственных чисел матрицы. Доказывается, что эти оценки при любом выборе функций принимают форму равенств в том и только в том случае, когда рассматриваемая матрица нормальна.

Ключевые слова: *нормальная матрица, функции от матриц, многомерный объём, субдискриминанты.*

Известно несколько равносильных определений нормальной матрицы. В Википедии их приводится двенадцать. В статье доказывается некоторое геометрическое свойство нормальных матриц, выделяющее их из пространства всех квадратных матриц и по форме отличающееся от других известных определений.

Символом $Mat_C(n)$ мы будем обозначать пространство квадратных комплексных матриц порядка n, которое далее рассматривается как унитарное пространство размерности n^2 с естественным скалярным произведением. Любую квадратную комплексную матрицу Z порядка n, рассматриваемую как вектор пространства $Mat_C(n)$, мы будем обозначать символом $\widehat{Z}$. Координаты этого вектора (элементы матрицы Z) мы будем располагать в порядке

11,12,...,1n,21,22,...,2n,...,n1,n2,...,nn (1)

(по строкам). Тем самым мы отличаем матрицы от перечней их элементов.

Определение функции от матрицы, определённой на её спектре, приводится в [1, с.96]. Для нас имеет значение, что, если m — степень минимального многочлена матрицы $Z \in Mat_C(n)$, то функция f от матрицы Z представима многочленом h_f степени не более $m-1$ (интерполяционным многочленом Эрмита) от этой матрицы: $f(Z) = h_f(Z)$.

Если $k \le n^2$ и матрицы $Z_1, \dots, Z_k \in Mat_C(n)$, то объём параллелепипеда размерности k, натянутого на векторы $\widehat{Z_1}, \dots, \widehat{Z_k}$, мы будем обозначать символом $V(\widehat{Z_1}, \dots, \widehat{Z_k})$. Пусть теперь $f_1(\zeta), \dots, f_k(\zeta)$ – функции, определённые на спектре матрицы Z. Значения $f_1(Z), \dots, f_k(Z)$ этих функций от матрицы Z являются векторами $\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)}$ пространства $Mat_C(n)$. Нас будет интересовать объём $V(\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)})$ параллелепипеда, натянутого на эти векторы. При этом, так как любое значение $f_\nu(Z)$ $(\nu = 1, \dots, k)$ может быть найдено как многочлен степени менее n от Z, то при $k > n$ рассматриваемые векторы линейно зависимы и объём натянутого на них параллелепипеда равен нулю. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением значений $k \le n$.

Пусть Ω – какая-то комплексная матрица размера $n^2 \times k$, где $k \le n$. Символом $\mathfrak{M}_k(\Omega)$ мы будем обозначать сумму квадратов абсолютных величин всех миноров порядка k этой матрицы. В [2, с. 69] установлена формула

$$V^2\left(\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)}\right) = \mathfrak{M}_k\left(\Phi(Z)\right), (2)$$

где $\Phi(Z)$ – матрица размера $n^2 \times k$, в столбце которой с номером $\nu = 1, \dots, k$ стоят элементы матрицы $f_\nu(Z)$, взятые в порядке (1). Таким образом, строки матрицы $\Phi(Z)$ мы будем нумеровать двумя числами p, q, которые соответствуют строкам с номером p и столбцам с номером q матриц $f_\nu(Z)$.

Кроме того, в [2] доказано, что, если U – унитарная матрица порядка n и $L = U^{-1}ZU$, то

$$V\left(\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)}\right) = V\left(\widehat{f_1(L)}, \dots, \widehat{f_k(L)}\right),$$

или, что то же самое вследствие (2),

$$\mathfrak{M}_k\left(\Phi(Z)\right) = \mathfrak{M}_k\left(\Phi(L)\right), (3)$$

где матрица $\Phi(L)$ имеет тот же размер, что и матрица $\Phi(Z)$, и образована аналогично ей столбцами $\widehat{f_1(L)}, \dots, \widehat{f_k(L)}$.

В частности, матрицу U можно выбрать в соответствии с теоремой Шура [1, с. 228], то есть так, чтобы матрица $L = (l_{pq})$ стала верхнетреугольной:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

причём все элементы над диагональю могут быть равны нулю, если и только если матрица Z нормальна. Тогда, разумеется, $f_\nu(L) = U^{-1} f_\nu(Z) U$ и

$$f_\nu(L) = \begin{pmatrix} f_\nu(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f_\nu(\lambda_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_\nu(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из (2) и (3) легко следует неравенство [2, с. 69]

$$V^2\left(\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)}\right) \ge \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \left| \begin{vmatrix} f_1(\lambda_{i_1}) & \cdots & f_k(\lambda_{i_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\lambda_{i_k}) & \cdots & f_k(\lambda_{i_k}) \end{vmatrix} \right|^2, (4)$$

которое обращается в равенство, когда матрица Z нормальна.

Это последнее обстоятельство является, как мы сейчас увидим, характерным свойством нормальных матриц, выделяющим их из пространства $Mat_C(n)$. Предварительно сделаем одно замечание. Предположим, что степень m минимального многочлена матрицы Z меньше её порядка n. Тогда при $m < k \leq n$ обе части неравенства (4) равны нулю. В самом деле, если $k > m$, то матрицы $f_1(Z), \dots, f_k(Z)$, являющиеся линейными комбинациями матриц $Z^0, Z, \dots, Z^{m-1}$, линейно зависимы. Поэтому левая часть неравенства (4) равна нулю, что влечёт равенство нулю и правой его части. При $k \leq m$ (здесь мы не предполагаем, что $m < n$) картина иная. Точнее, справедлива следующая теорема, которую можно рассматривать как ещё один критерий нормальности матрицы.

Теорема. *Пусть $Z \in Mat_C(n)$ и m – степень минимального многочлена этой матрицы. Тогда, если $k \leq m$ и функции $f_1(\zeta), \dots, f_k(\zeta)$ определены на спектре матрицы Z, то справедливо неравенство (4). Это неравенство обращается в равенство, если матрица Z нормальна. Если же матрица Z не является нормальной, то для любого $k \leq m$ можно найти такие функции $f_1(\zeta), \dots, f_k(\zeta)$, что неравенство (4) будет строгим.*

Доказательство. Пусть $L = U^{-1}ZU$, где матрица U унитарна, а матрица L верхнетреугольна. В матрице $\Phi(L)$ есть подматрица Λ (главная подматрица) размера $n \times k$, образованная строками с номерами $11, 22, \dots, nn$, то есть состоящая из диагональных элементов матриц $f_\nu(L)$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} f_1(\lambda_1) & \cdots & f_k(\lambda_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\lambda_n) & \cdots & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда, естественно, $\mathfrak{M}_k(\Phi(L)) \geq \mathfrak{M}_k(\Lambda)$, что и доказывает неравенство (4), то есть первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения заметим, что, если матрица Z нормальна, то все ненулевые элементы матрицы $\Phi(L)$ содержатся в главной подматрице.

Переходим к третьему утверждению теоремы, предполагая, что матрица Z не является нормальной. В качестве функций $f_\nu(\zeta)$ при $\nu = 1, \dots, k$ можно взять любые линейно независимые многочлены степени не более $k-1$. В частности, таковыми являются степени

$$f_1(\zeta) = 1, f_2(\zeta) = \zeta, \dots, f_k(\zeta) = \zeta^{k-1}. (5)$$

Могут представиться два случая. В первом из них правая часть неравенства (4) равна нулю. Так как $k \leq m$, то матрицы $f_\nu(Z)$ при $\nu = 1, \dots, k$ линейно независимы, откуда следует, что левая часть неравенства (4) больше нуля.

Во втором случае правая часть неравенства (4) положительна. Тогда найдутся собственные числа $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ с отличным от нуля определителем

$$\begin{vmatrix} f_1(\lambda_{i_1}) & \cdots & f_k(\lambda_{i_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\lambda_{i_k}) & \cdots & f_k(\lambda_{i_k}) \end{vmatrix} \neq 0. (6)$$

Так как матрица Z не нормальна, то матрица L не диагональна. Докажем, что матрицы $f_\nu(L)$ также не могут все одновременно быть диагональными. Действительно, у матрицы L есть элемент $l_{pq} \neq 0$ при $p \neq q$. Элементы матриц L^r при $r = 0,1, \dots, k-1$, стоящие на пересечении строки с номером p и столбца с номером q, обозначим через $l_{pq}^{(r)}$. В частности, $l_{pq}^{(0)} = 0, l_{pq}^{(1)} = l_{pq}$.

Далее, в соответствии с нашим выбором, функции $f_\nu(\zeta)$ являются многочленами степени не более $k-1$:

$$f_\nu(Z) = b_{\nu 0}E + b_{\nu 1}Z + \dots + b_{\nu,k-1}Z^{k-1}$$

(E – единичная матрица) с некоторыми комплексными коэффициентами $b_{\nu s}$. Эти же коэффициенты используются и при вычислении $f_\nu(L)$.

Если мы предположим, что все матрицы $f_\nu(L)$ диагональны, то, взяв пересечения строк с номером p и столбцов с номером q в них, получим систему равенств

$$\begin{cases} b_{10}l_{pq}^{(0)} + b_{11}l_{pq}^{(1)} + \dots + b_{1,k-1}l_{pq}^{(k-1)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{k0}l_{pq}^{(0)} + b_{k1}l_{pq}^{(1)} + \dots + b_{k,k-1}l_{pq}^{(k-1)} = 0 \end{cases}$$

с ненулевой строкой $\left(l_{pq}^{(0)}, \dots, l_{pq}^{(k-1)}\right)$. Отсюда следует, что столбцы коэффициентов многочленов $f_\nu(\zeta)$ линейно зависимы. Поэтому линейно зависимы и строки этих коэффициентов, то есть и сами многочлены. Следовательно, вопреки нашему предположению, минор (6) равен нулю.

Итак, если матрица L не диагональна и минор (6) отличен от нуля, то в матрице $\Phi(L)$ есть хотя бы одна ненулевая строка с номером pq при $p \neq q$. Отсюда нетрудно вывести, что у этой матрицы есть ненулевые миноры, отличные от максимальных миноров матрицы Λ. В самом деле, так как строки $i_1 i_1, \dots, i_k i_k$, образующие минор (6), линейно независимы, то они образуют базис в пространстве строк размерности k и строка pq является их нетривиальной линейной комбинацией. Поэтому она не может образовывать линейно зависимую систему вместе с каждым из наборов $k-1$ строк из множества $i_1 i_1, \dots, i_k i_k$. Следовательно, неравенство (4) становится строгим, что и завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема имеет одно приложение к субдискриминантам произвольной квадратной матрицы. Напомним необходимые определения. Пусть матрица $Z \in Mat_C(n)$, а $P = P_Z(\lambda)$ – её характеристический многочлен. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – полный набор корней многочлена с учётом их кратностей, то субдискриминантом $sDis_k(P)$ с номером k этого многочлена называется выражение

$$sDis_k(P) = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, \#(I) = n-k} \prod\nolimits_{(i,j) \in I, i<j} \left(\lambda_j - \lambda_i\right)^2,$$

где символ # обозначает число элементов конечного множества. Кроме того, по определению $sDis_{n-1}(P) = n$, $sDis_n(P) = 1$.

Субдискриминанты являются симметрическими многочленами от корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, так что должны выражаться через элементы матрицы Z. Поэтому уместно ввести для них также обозначение $sDis_k(Z) = sDis_k(P)$. Из доказательства теоремы следует, что, взяв степенные функции (5), мы при всех значениях k, $2 \le k \le m$, получим неравенство

$$V^2\left(\hat{E}, \hat{Z}, \dots, \widehat{Z^{k-1}}\right) \ge \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \prod_{1 \le s < t \le k} |\lambda_{i_t} - \lambda_{i_s}|^2,$$

которое является строгим, если матрица Z не нормальна. Отсюда легко следует оценка сверху для субдискриминантов матрицы Z:

$$|sDis_{n-k}(Z)| \le V^2\left(\hat{E}, \hat{Z}, \dots, \widehat{Z^{k-1}}\right),$$

которая является строгой, если $2 \le k \le m$ и матрица Z не нормальна.

Литература:

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.-552 с.

2. Илюшечкин Н. В. Об одном экстремальном свойстве нормальных матриц, Математические заметки, 2015, том 97, выпуск 1, с. 67 – 73.