ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

УДК 539.19

Исследование влияние электрического поля на волновое движение жидкости

Егерева Эльвира Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Пашкова Ксения Валерьевна, студентка 2 курса факультета Биотехнологии и биологии
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева
г. Саранск

Аннотация. *Рассматривается задача о распространении волн не заряженной поверхности жидкого проводника.*

Исследовано влияние электрического поля на форму свободной поверхности жидкости. Показано, что высота волны растет при увеличении плотности поверхностного заряда для жидкого проводника и убывает при увеличении поверхностного натяжения.

Показано, что разность высоты волны и глубины ее впадины зависит от электрического поля. С ростом поля эта разность уменьшается, то есть волна теряет свою асимметрию в вертикальном направлении.

Работа носит теоретический характер. Однако данные результаты могут быть применены в технологических устройствах.

Ключевые слова: *электрическое поле, период колебаний волн, переносная скорость, поверхностный заряд, безразмерный параметр.*

Annotation. *The problem of the propagation of waves of a non-charged surface of a liquid conductor is considered.*

Investigation of the effect of an electric field on the shape of the free surface of a liquid. It is shown that the wave height increases with an increase in the density of the surface charge for a liquid conductor) with an increase in the electric field strength (for a liquid dielectric, and decreases with an increase in the surface tension.

It is shown that the difference in the height of the wave and the depth of its cavity depends on the electric field. With increasing field this difference decreases, i.e. The wave loses its asymmetry in the vertical direction.

The work is of a theoretical nature. However, these results can be applied in technological devices.

Keywords: *electric field, wave oscillation period, transport velocity, surface charge, dimensionless parameter.*

Исследование поверхностных волн в жидкостях, взаимодействующих с электрическим полем, имеет практический и теоретический интерес. Движение частиц вязкой несжимаемой жидкости, вызванное распространением по свободной поверхности волны малой амплитуды рассмотрено в работе [2].

Рассматривается распространение волн на заряженной поверхности бесконечно глубокого слоя жидкого проводника, находящегося в однородном слое тяжести. Несжимаемая однородная жидкость граничит с атмосферой.

В линейном приближении задача о волнах на поверхности жидкого проводника решена в работе [3].

Поскольку частота волны имеет вид $\omega_w = ck$, будем иметь

$$\frac{\omega_w}{\omega_p} = 1 + \delta^2\gamma_2. (1)$$

Вводим периоды колебаний волны τ_w и жидкой частицы τ_p. Тогда определим $\frac{\tau_p}{\tau_w} = 1 + \delta^2\gamma_2$. (2)

Выражение переносной скорости $V_S{}^*$ запишем в виде

$$V_S{}^* = \delta^2 e^{2b}\left[\frac{g}{k} + \sigma_c \varepsilon \sigma_e\right]^{1/2}. \qquad (3)$$

Наибольшие значения она принимает на свободной поверхности когда $b = kz_0{}^* = 0$. При $b \to -\infty$, $V_S{}^* \to 0$. Для выражение $\sigma_e = \sigma_c = 0$ (3) совпадает с полученным в обычной гидродинамике [1]. Наличие поверхностного натяжения $\alpha \neq 0$ приводит к увеличению переносной скорости.

При увеличении поверхностного заряда и связанной с ним напряженность электрического поля $E_0{}^* = 4\pi\sigma_0{}^*/\varepsilon$ величина $V_S{}^*$ убывает и обращается в нуль при $\varepsilon\sigma_e = \frac{g}{k} + \sigma_c$, где $\sigma_c = \alpha k/\rho$, $\sigma_e = E_0{}^{*2}/(4\pi\rho)$. Таким образом, для каждого значения $E_0{}^*$ существует такая длина волны $\lambda = 2\pi/k$ для которой $V_S{}^* = 0$.

Введем два безразмерных параметра взаимодействия, которые характеризуют относительную величину капиллярных и электрических сил по сравнению с гравитационными

$$\Pi_c = \frac{\sigma_c k}{g} = \frac{\alpha k^2}{\rho g};\ \Pi_E = \frac{\varepsilon\sigma_e k}{g} = \frac{\varepsilon k E_0{}^{*2}}{4\pi\rho g} \qquad (3)$$

При $\Pi_c \gg 1$, что соответствует коротким волнам, выражение переносной скорости будет иметь вид

$$V_S{}^* = \delta^2 e^{2b}\Pi_c{}^{1/2}\ (4)$$

Причем $V_S{}^*$ возрастает при $k \to \infty$ и длине волны $\lambda \to 0$. При $\lambda \to \infty$ и при волновом числе $k \to 0$ величина $\Pi_c \ll 1$, тогда $V_S{}^* = \delta^2 e^{2b}(g/k)^{1/2}$.

При заданной величине $E_0{}^*$ минимальное значение $V_S{}^*$ достигается при

$$k_{min} = \sqrt{\rho g/\alpha} \qquad (5)$$

А величина $V_S{}^*$ при этом равна

$$V_S{}^* = \delta^2 e^{2b}\left[2(\alpha g/\rho)^{1/2} - \varepsilon\sigma_e\right]^{1/2}\ (6)$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Наблюдаем, что при увеличении ${E_0}^*$ минимальное значение ${V_S}^*$ убывает и обращается в нуль, при $\varepsilon\sigma_e = 2\sqrt{\alpha g/\rho}$, а при ${E_0}^* = 0$ принимает наибольшее значение ${V_S}^* = \delta^2 e^{2b}\left(2\sqrt{\alpha g/\rho}\right)^{1/2}$.

Из (2) следует, что в нелинейных волнах период колебания частицы превышает период волны. Это различие периодов определяется исключительно амплитудой волны δ и глубокой равновесного положения частицы $b = kz^*$ и не зависит ни от поверхностного натяжения α, ни от напряженности электрического поля ${E_0}^*$. Для линейных волн при амплитуде волны δ=0 период колебаний частицы $\tau_p = \tau_w$.

Рассмотрим влияние поверхностного натяжения и электрического поля на формулу траектории жидкой частицы в линейном приближении. Выражения $x(a,b,t) = X_0 + \delta X_1 + \delta^2 X_2 + \delta^3 X_3$ и $z(a,b,t) = Z_0 + \delta Z_1 + \delta^2 Z_2 + \delta^3 Z_3$ принимают при этом вид

$x(a,b,t) = X_0 + \delta X_1 = a - t - \delta e^b \sin(a-t)$

$z(a,b,t) = Z_0 + \delta Z_1 = b + \delta e^b \cos(a-t)$

Переходя к размерным обозначениям, имеем (в линейном приближении)

$$x* = {x_0}^* - {\xi_m}^* e^b \sin(k{x_0}^* - \omega_p t^{*)} \qquad (7)$$

$z* = {z_0}^* - {\xi_m}^* e^b \cos(k{x_0}^* - \omega_p t^{*)}$

${x_0}^* = a/k, {z_0}^* = b/k, {\xi_m}^* = \delta/k$

Из (7) следует

$$A_2 + A_3 = Q_3^{(2)} + 3Q_2^{(1)} + Q_1^{(2)} + 1 = \frac{42\Pi_c + 105\Pi_c^2}{16(3\Pi_c - 1)(2\Pi_c - 1)} + \frac{75\Pi_c}{8(1-2\Pi_c)} - $$
$$- \frac{20\Pi_c + 14\Pi_c^2 + 5}{16(1-2\Pi_c)(1-\Pi_E+\Pi_c)} + \frac{\Pi_E(8\Pi_c+11)}{128(1-2\Pi_c)(1-\Pi_E+\Pi_c)} + \frac{13}{16}.$$

В случае чисто капиллярных волн, когда $\Pi_c >> 1$ можно пренебречь силой тяжести и электрической силой по сравнению с капиллярной, при этом

$$A_2 + A_3 \approx \frac{102\Pi_c^{-1} + 147}{96} - \frac{31}{8}.$$

Таким образом, если увеличивается поверхность натяжения α, то амплитуда волны уменьшается. А при $\Pi_c \to \infty$ величина $A_2 + A_3 \approx -2{,}2$; тогда как $A_2 + A_3 = 0{,}5$ при $\alpha = 0$, то есть при $\Pi_c = 0$.

Если поверхностное натяжение отсутствует $\Pi_c = 0$, то получаем

$$A_2 + A_3 = \frac{11\Pi_E}{128(1-\Pi_E)} + \frac{1}{2}.$$

В случае $\Pi_c \approx \Pi_E \neq 0$ будем иметь

$$A_2 + A_3 \approx \frac{42\Pi_c + 105\Pi_c^2}{16(3\Pi_c-1)(2\Pi_c-1)} - \frac{75\Pi_c}{8(2\Pi_c-1)} + \frac{20\Pi_c + \Pi_c^2 + 5}{16(2\Pi_c-1)(2\Pi_c-1)} - \frac{\Pi_E(8\Pi_E+11)}{128(2\Pi_c-1)} + \frac{13}{16} = \frac{1}{2\Pi_E - 1}\left[\frac{42\Pi_E + 105\Pi_c^2}{16(3\Pi_E-1)} - \frac{75\Pi_E}{8} + \right.$$
$$\left. - \frac{\Pi_E(8\Pi_E+11)}{128}\right] + \frac{13}{16}.$$

Если значение достаточно большое $\Pi_E \approx \Pi_c$, то величина $A_2 + A_3$ становится отрицательной, что указывает на уменьшение высоты волны.

При слабом поле:$\Pi_c >> 1, \Pi_E >> 1$, но $\Pi_c - \Pi_E > 0$, можно записать

$$A_2 + A_3 = \frac{42\Pi_c^{-1} + 105}{96} + \frac{80\Pi_c^{-1} + 7 - 4\Pi_E\Pi_c^{-1}}{128(1-\Pi_E\Pi_c^{-1})} + \frac{11}{2}.$$

Так как $\Pi_c > \Pi_E$, то при $\Pi_c \to \infty$ будет происходить уменьшение амплитуды волны, при этом $A_2 + A_3 \geq 6{,}5$.

Получим теперь на основании

$\xi^* = \frac{1}{k}[\delta\cos x + \delta^2\Lambda_1\cos 2x + \delta^2(\Lambda_2 \cos 3x + \Lambda_3\cos x)]$ выражение для амплитуды вершины $h_i = \xi^*(0) - \xi^*(\pi/2)$ и впадины $h_l = \xi^*(\pi/2) - \xi^*(\pi)$:

$$h_t = \frac{\delta}{k}[1 + 2\delta\Lambda_1 + \delta^2(\Lambda_2 + \Lambda_3)],$$

$$h_l = \frac{\delta}{k}[1 - 2\delta\Lambda_1 + \delta^2(\Lambda_2 + \Lambda_3)],$$

Заметим, что $h = h_t + h_l$. Разность между амплитудами h_t, h_l равна

$$h_t - h_l = \frac{4\delta^2}{k}\Lambda_1 = \frac{2\delta^2}{k}\frac{\Pi_c + 1}{1-2\Pi_c}. \quad (8)$$

Видим, что $h_t - h_l$ не зависит от электрического поля. Разность $h_t - h_l$ при $2\Pi_c < 1$ положительна, т.е. амплитуда вершины волны больше амплитуды впадины; вершина уже, впадина шире. При $2\Pi_c = 1$ рассматриваемая теория неприменима. Если $2\Pi_c > 1$, то амплитуда вершины меньше амплитуды впадины.

Изучим влияние электрического поля на скорость распределения поверхностной волны. Выражение для фазовой скорости волны

$\varphi_n = e_z e^{-nz}\cos nx, E_{xn} = e_z e^{-nz}\sin nx, E_{xn} = e_z n e^{-nz}\cos nx,$

$\sigma = e_z n e^{-nz}\cos nx$ запишем при $n = 1$ в виде

$$c = \left[\frac{g}{k} + \sigma_c - \varepsilon\sigma_e\right]^{1/2}\left(1 - \frac{1}{2}\delta^2\Theta_2\right), \quad (9)$$

$$\Theta_2/2 = \frac{3\Pi_c}{8(1-2\Pi_c)} - \frac{3}{16} - \frac{1}{16}\left(\frac{18\Pi_c + 18\Pi_c^2}{1-2\Pi_c} + 2\Pi_e + 5\right)(1 - \Pi_E + \Pi_c)^{-1} + \frac{\Pi_E}{64}\left(\frac{15\Pi_c}{1-2\Pi_c} + \frac{11}{2}\right)(1 - \Pi_E + \Pi_c)^{-1}.$$

Выражение (8) указывает на то, что фазовая скорость зависит от квадрата амплитуды волны. При $\Pi_c = \Pi_E = 0$ из выражения фазовой скорости следует формула [1]:

$c = (g/k)^{1/2}(1 + \delta^2/2).$

Дисперсионное уравнение, которое представляет связь частоты $\omega = ckc$ волновым числом k, имеет вид

$\omega = (gk + \sigma_c k^2 - \varepsilon\sigma_e k^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{1}{2}\delta^2\Theta_2)$.

В случае $\Pi_E = 0, \Pi_c \neq 0$ выражение $\Theta_2/2$ имеет вид

$\Theta_2/2 = -\frac{\Pi_c+2\Pi_c^2+8}{16(1-\Pi_c-2\Pi_c^2)}$.

При $\Pi_c = 0$ величина $\Theta_2/2 = -1/2$. В случае $\Pi_c >> 1$ имеем $\Theta_2/2 \approx 1/16$. Для $\Pi_c = 0, \Pi_E \neq 0$ имеем $(\Pi_E < 1)$:

$\Theta_2/2 = -\frac{35\Pi_E-64}{128(1-\Pi_E)}$.

Отсюда следует, что при увеличении Π_E величина $\Theta_2/2$ возрастает по

Из (9) видно, что при увеличении E_0^* фазовая скорость волны с заданным значением k уменьшается и обращается в нуль при $g/k + \sigma_c = \varepsilon E_0^* / 4\pi\rho$. При заданных α и E_0^* значение волнового числа k, при котором c_0 достигает минимума, определяется из условия $dc_0/dk = 0$.

$k_{min} = \sqrt{\rho g/\alpha}$,

а минимальное c_0 значение равно $c_{0_{min}} = (2\sqrt{\alpha g/\rho} - \varepsilon\sigma_e)^{1/2}$.

Отметим, что k_m не зависит от E_0^*, а $c_{0_{min}}$ зависит. При $2\sqrt{\alpha g/\rho} = \varepsilon\sigma_e$ то есть при $E_{0_{min}}^* = (64\pi^2\alpha g\rho\varepsilon^{-2})^{1/4}$ величина $c_{0_{min}}$ обращается в нуль. Значение $E_{0_{min}}^*$ соответствует величина поверхностной плотности заряда

$$\sigma_{0m}^{*4} = (\varepsilon\, E_{0_{min}}^*/4\pi)^4 = \alpha\rho g\varepsilon^2/(4\pi^2). \quad (10)$$

При $\sigma_0{}^* > \sigma_{0_{min}}^*$ поверхность становится неустойчивой – происходит ее разрушение.

Различие между плотностью поверхностного заряда на вершине $x = 0$ и впадине при $x = \pi$ равно при $n = 1$:

$\sigma^*(0) - \sigma^*(\pi) = \sigma_0^* e_z\{2\delta + \delta^3\left[6\left(Q_3^{(2)} + \frac{B_3}{6}\right) + 1\right]\}$,

$$Q_3^{(2)} = \frac{1}{16(3\Pi_c-1)}\left[\frac{15\Pi_c}{2\Pi_c-1} + \frac{159\Pi_c^2}{2\Pi_c-1}\, 27\Pi_c\right], \quad (11)$$

$B_3 = 14Q_2^{(1)} + \frac{11}{2}$,

$Q_2^{(1)} = \frac{3\Pi_c}{2(1-2\Pi_c)}$.

Параметр Π_E не входит в выражение $Q_3^{(2)} = \frac{1}{16(3\Pi_c-1)}\left[\frac{15\Pi_c}{2\Pi_c-1} + \frac{159\Pi_c^2}{2\Pi_c-1}\, 27\Pi_c\right]$, то есть электрическое поле не влияет на величину $\sigma^*(0) - \sigma^*(\pi)$. Для $\Pi_c = 0$ имеем $\sigma^*(0) - \sigma^*(\pi) = \sigma_0{}^* e_z\left(2\delta + \frac{13}{2}\delta^3\right)$ то есть плотность заряда на вершине больше, чем во впадине, так как предыдущая разность положительна. Это приводит к тому, что электрическая сила на вершине волны, направленная вертикально вверх, больше чем во впадине, т.е. электрическая сила стремится создать неустойчивость поверхности. Поскольку $\delta^2 \ll 1$ разность $\sigma^*(0) - \sigma^*(\pi)$ будет положительна при всех реальных значениях параметров, входящих в выражение Π_c.

Литература:

1. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во: Ленинградского университета. – 1981. – 196с.

2. Басинский К. Ю., Название источника: Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Издательство: Удмуртский государственный университет. – Ижевск, – 198 с.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, –1982.– 624с.