ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Математическая модель распространения волн по поверхности жидкого диэлектрика

Егерева Эльвира Николаевна, кандидат физико – математических наук, доцент
Казакова Юлия Владимировна, студент
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева

В статье построена математическая модель распространения поверхностных волн в поляризующийся жидкой среде, находящийся в электрическом поле конденсатора, к обкладкам которого приложена разность потенциалов. Записаны уравнения движения жидкости, уравнения для электрического поля в жидкости и атмосфере, а также граничные условия на свободной поверхности жидкости и на твердых поверхностях — обкладках конденсатора. Решение краевой задачи ищется методом малого параметра. Найдены общие выражения для фазовой и групповой скорости поверхностной волны в жидкой среде, взаимодействующей с электрическим полем. Найдено дисперсионное соотношение, связывающее частоту с волновым числом.

Рассматривается распространение волн по свободной поверхности жидкого диэлектрика, слой которого находится в зазоре конденсатора, создающего поперечное к этому слою электрическое поле. Ось z направлена вертикально вверх, а плоскость $x^*y^*(z^*=0)$ совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости. Толщину плоских слоев жидкости и атмосферы обозначим, h_2^* соответственно.

Уравнения движения жидкости имеют вид [22]:

$$\rho(\partial v^*/\partial t^* + (\vec{v}^*\nabla^*)\vec{v}^*) = -\nabla^* p^* + \rho\vec{g}^*;\ div^*\vec{v}^* = 0, (1)$$

здесь и далее звездочкой будем обозначать размерные величины, чтобы их отличать от безразмерных величин, обозначаемых теми же буквами только без звездочек. ρ — плотность жидкости; $\vec{v}^*$ - скорость; p^*- давление; $\vec{g}^*$ - ускорение силы тяжести.

Уравнения Максвелла для электрического поля имеют вид:

$$rot^*\vec{E}^* = 0\ ;\ div^*\vec{D}^* = 0, (2)$$

где $\vec{D}^* = \varepsilon E^*$, $\varepsilon = const$ — диэлектрическая проницаемость

Граничные условия на свободной поверхности жидкости $(z^*=0)$ запишем следующим образом

$$v_n^* - V_n^* = 0, \{\vec{E}^* - \vec{n}E_n^*\} = 0, \{\vec{n}\cdot\vec{D}^*\} = 0,$$

$$\{p_{ij} * n_i n_j\} = -\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\ (z^* = 0),$$

где v_n^* V_n^* - нормальные скорости жидкости и поверхности, $\vec{n}$ — нормаль, направленная из области 1 в — 2; $\{A\} = A_2 - A_1$ - скачок или разрыв величины на поверхности.

К граничным условиям на свободной поверхности добавляются условия на твердых поверхностях обкладках конденсатора:

$$v_n^* = 0, \varphi_1^* = \Phi_{1,}^*\ (z_1^* = -h_1^*)\ ;$$

$$\varphi_2^* = \Phi_{2,}^*\ (z_2^* = h_2^*),$$

где первое условие — это условие не протекания жидкости; $\Phi_{1,}^*$ Φ_2^* - заданные постоянные потенциалы на нижней и верхней обкладках конденсатора; $U^* = \Phi_2^* - \Phi_1^*$ - разность потенциалов.

Уравнение свободной поверхности жидкости: $z^* = \xi^*(x^*, t^*)$, где ξ^* - величина смещения свободной поверхности, t^*- время.

Напряженность электрического поля связана с потенциалом φ по формуле $\vec{E}^* = -\nabla^*\varphi^*$. Из уравнений Максвелла следует $\Delta^*\varphi_i^* = 0\ (i = 1, 2)$.

Исходные граничные условия запишем в виде

$$v_z^* = v_x^*\,\partial\xi^*/\partial x^* + \partial\xi^*/\partial t^*,$$

$$\left\{\vec{E}^* - \frac{\ni_z^* - \ni_x^*(\partial\xi^*/\partial x^*)}{\sqrt{1+(\partial\xi^*/\partial x^*)^2}}\cdot E_n^*\right\} = 0;$$

$$\{\varepsilon[\ni_z^* - \ni_x^*\ (\partial\xi^*/\partial x^*)]\cdot\vec{E}^*\} = 0\ ; (3)$$

$$\{\,p^* - \varepsilon E_n^{*2}/8\pi + \varepsilon E_\tau^{*2}/8\pi\,\} = \frac{\alpha(\partial^2\xi^*/\partial x^{*2})}{(\sqrt{1+(\partial\xi^*/\partial x^*)^2})^3};$$

$$E_n^* = \vec{E}^*\cdot\vec{n}\ ;\ E_\tau^* = \vec{E}^* - \vec{n}E_n^*,$$

где $\ni_z^*, \ni_x^*$— базисные векторы.

Сделаем безразмерными величины, входящих в уравнения и граничные условия.

В случае распространения волны можно записать

$E_i^* = E_{0i}^* + E_{wi}^*$; $\varphi_{0i}^* + \varphi_{wi}^*$, где нижним индексом 0 обозначены невозмущенные величины, а w - возмущения величины. Далее перейдем от неподвижной системы координат к движущейся со скоростью c, где c — фазовая скорость волны. Кроме того, в данном случае представляет интерес так называемая групповая скорость

$$U(k) = d\omega(k)/dk, (4)$$

являющаяся скоростью переноса энергии в волнах с волновым числом в окрестности k, $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны.

Введем следующие безразмерные величины, входящие в исходные уравнения [1, 2]

$$x = k\,(x^* - ct^*), z = kz^*, \xi = \xi^* k/\delta, \vec{v} = \vec{v}^*/\delta c\,, \vec{E}_i = E_{w_i}^*/\delta E_{0i}^*,$$

$$\eta = \varepsilon_1/\varepsilon_2, e_z = E^*_{0zi}/E^*_{0i} = \pm 1, \varphi_i = k\varphi^*_{w_i}/\delta E^*_{0i}. (5)$$

Следует отметить, что исследование поверхностных волн в средах, взаимодействующих с электрическим полем, проведено к настоящему времени только в частных случаях, а полный нелинейный анализ этого явления отсутствует. Тогда как решение задачи в линейном приближении дает неполное представление о распространении волн, жидкости.

Для решения данной задачи используем метод возмущений. В качестве малого безразмерного параметра берем $\delta =$ рем $\delta = 2\pi|\xi^*_m|\lambda^{-1}$, где ξ^*_{max} – максимальное значение смещения свободной поверхности жидкости $\xi^*(z^*, t^*)$. Давление запишем в виде

$$p^*_1 \equiv p^* = p^*_0 + p^*_w, (6)$$

где p^*_0 – равновесное давление при отсутствии волны, причем это давление запишем в виде

$$p^*_0 = -\rho g z^* + C, (7)$$

где C – произвольная постоянная, для нахождения которой воспользуемся первым динамическим граничным условием в (3) при отсутствии волны

$$-p_2 + \frac{\varepsilon_2 E^*_{02}}{4\pi} - \frac{\varepsilon_2 E^{*2}_{02}}{8\pi} + p_1 - \frac{\varepsilon_1 E^{*2}_{01}}{4\pi} + \frac{\varepsilon_1 E^{*2}_{01}}{8\pi} = 0.$$

С учетом значения C давление p^*_0 находится из (7). Безразмерное давление определим следующим образом

$$p = p^*_w/\rho\delta c^2 = p^* - p^*_0/\rho\delta c^2. (8)$$

Невозмущенный электрический потенциал имеет вид:

$$\varphi^*_{01} = -E^*_{0z1}z^* + C_1; \varphi^*_{02} = -E^*_{0z2}z^* + C_2.$$

Граничные условия на обкладках конденсатора запишем в виде

$$\varphi^*_{w1} = 0, (z = -h^*_1); \varphi^*_{w2} = 0, (z = h^*_2). (9)$$

В безразмерных обозначениях система уравнений движения примет вид [1,2]

$$-\partial\vec{v}/\partial x + \delta(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla p, div\,\vec{v} = 0,$$

$$\Delta\varphi_i = 0, \vec{E}_i = -grad\varphi_i \ (i = 1, 2). (10)$$

Уравнение свободной поверхности примет вид $z = \delta\xi(x)$.

Граничные условия (3) записываются в виде (при $z = \delta\xi(x)$.

$$v_z = \delta v_x\, d\xi/dx - d\xi/dx,$$

$$e_z\, d\xi/dx + E_{1x} = \eta(e_z\, d\xi/dx + E_{2x}),$$

$$E_{1z} - \delta E_{1x}\, d\xi/dx = E_{2z} - \delta E_{2x}\, d\xi/dx, (11)$$

$$\varepsilon_1\sigma_{e_1}k\left[e_z E_{1z} - \frac{\delta}{2}(E^2_{1x} - E^2_{1z}) - \delta(d\xi/dx)^2 - \right.$$

$$\left. -2\delta e_z E_{1x}\, d\xi/dx\right] + \varepsilon_2\sigma_{e_2}k\left[e_z E_{2z} + \frac{\delta}{2}(E^2_{2x} - E^2_{2z}) + \right.$$

$$\left. + \delta(d\xi/dx)^2 + 2\delta e_z E_{2x}\, d\xi/dx\right] - (p - \xi/\nu)g\nu =$$

$$= \sigma_c k\, d^2\xi/dx^2\left[1 - \frac{3\delta^2}{2}(d\xi/dx)^2\right],$$

$$\nu = kc^2/g, \sigma_c = \alpha k/\rho, \sigma_{e1} = D^{*2}_0/4\pi\rho\varepsilon^2_1, \sigma_{e2} = D^{*2}_0/4\pi\rho\varepsilon^2_2.$$

В последнем условии (11) использовано разложение при $\gamma << 1$

$(1+\gamma)^\alpha = 1 + \alpha\gamma + ...$

при $\alpha = -3/2, \gamma = (\delta d\xi / dx)^2$. Малые высших порядков отброшены.

Условия на твердых поверхностях

$$v_n = 0, \ \varphi_1 = 0, (z = -h_1); \ \varphi_2 = 0, (z = h_2), (12)$$

где $h_1 = kh^*_1, h_2 = kh^*_2$.

Будем предполагать также выполненными условия периодически и симметрии волны относительно вертикали, а также условие, связанное с выбором оси x, которая лежит на невозмущенной поверхности жидкости.

$$\xi(x + 2\pi) = \xi(x); \ \xi(-x) = \xi(x); \ \int_0^{2\pi}\xi(x)dx = 0.$$

Прежде чем исследовать нелинейную задачу, рассмотрим линейную краевую задачу, получающуюся из нелинейной при $\delta = 0$:

$$\partial v_z/\partial z = -\partial p/\partial x, \partial v_z/\partial x = \partial p/\partial z, (13)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2} = 0, (i = 1,2),$$

$$E_{ix} = -\partial\varphi_i/\partial x, E_{iz} = -\partial\varphi_i/\partial z.$$

Граничные условия при $z = 0$ имеют вид:

$$v_z = -d\xi/dx, e_z\, d\xi/dx + E_{1x} = \eta(e_z\, d\xi/dx + E_{2x}), (14)$$

$$E_{1z} = E_{2z}; \ \varepsilon_1\sigma_{e_1}ke_zE_{1z} - \varepsilon_2\sigma_{e_2}ke_zE_{2z} -$$

$$-(p - \xi/x)g\nu = \sigma_c k\ \partial^2\xi/\partial x^2.$$

Граничные условия на твердых поверхностях, а также условия симметрии и периодичности остаются без изменения.

Из первых двух уравнений (13) следует уравнение Лапласа вида:

$$\partial^2 v_z/\partial x^2 + \partial^2 v_z/\partial z^2 = 0. (15)$$

Решаем это дифференциальное уравнение методом разделения переменных $v_z = X(x)Z(z)$. Для этого подставляем v_z в (15), и находим два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка

$$X''(x) + qX(x) = 0, Z''(z) - qZ(z) = 0, (16)$$

Из первого уравнения (14) следует

$\xi(x) = -\int v_z(x,0)dx =$
$=\frac{1}{q}\int Z(0)\, X''(x)dx \ = \frac{1}{q}Z(0)X'(x) + \ C.$

Вследствие третьего условия (14) имеем $C = 0$. Поскольку $\xi(x)$ имеет период 2π, то $X(x)$ и $X'(x)$ должны иметь такой же период. Для этого необходимо потребовать, чтобы $q = n^2, (n = 1, 2, 3 \ldots)$. Таким образом, $\xi(x)$ может быть линейной комбинацией $cos(nx)$ и $sin(nx)$. В связи с условием симметрии $\xi(-x) = \xi(x)$ можно записать окончательно $\xi_n(x) = \beta_n\, cos(nx)$. Примем далее условие нормировки функции $\xi(x)$, заключающееся в равенстве единице ее амплитуды $\beta_n = 1$ при любом натуральном n. Таким образом, $X(x) = \sin(nx)$. Тогда для v_{zn} имеем выражение:
$v_{zn} = \ (Ae^{nz} + \ Be^{-nz}) \sin(nx).$

При $z = -h_1$: $v_z = 0$, поэтому

$$B = -Ae^{-2nh_1}$$

Отсюда следует

$v_{zn} = 2Ae^{-nh_1} sh(n(z + h_1)) \cdot \sin(nx).$

Поскольку $v_z = -d\xi/dx$ при $z = 0$, находим $A = \ ne^{nh_1}(2sh(nh_1))^{-1}$.

Окончательно будем иметь

$$v_{zn} = n/sh(nh_1)\ sh(n(z + h_1)) \cdot \sin(nx)\,, (n = 1,2,3 \ldots). \quad (17)$$

Уравнения для скалярного потенциала (13) также решаем методом разделения переменных. При этом

$\varphi_i(x,z) = \Phi_i(x)\, \Psi_i\,(z), (i = 1,2).$

Получаем обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$\Phi_i'' + \ q_i\Phi_i = 0;\ \Psi''_i - q_i\Psi_i = 0, (i = 1,2),$

из которых следует решение вида:

$\varphi_{1n} = (A_1e^{nz} \ + B_1e^{-nz}\,)(C_1 \cos(nx) + \ D_1 \sin(nx)),$
$\varphi_{2n} = (A_2e^{nz} \ + B_2e^{-nz}\,)(C_2 \cos(nx) + \ D_2 \sin(nx)),$
$E_{1x} = -\partial\varphi_1/\partial x\,, E_{1z} \ = -\partial\varphi_1/\partial z\,, E_{2x} = \ -\partial\varphi_2/\partial x\,, E_{2z} \ = -\partial\varphi_2/\partial z.$

Из второго и третьего граничных условий (14) следует $D_1 \ = D_2 \ = 0$.

Условия на обкладках конденсатора или на твердых поверхностях дают решение вида:

$\varphi_{1n} = \ \bar{A}_1 sh(n(z + h_1)) \cos(nx),$
$\varphi_{2n} = \ \bar{A}_1 sh\, n(z + h_1)) \cos(nx),$

где $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ — постоянные величины.

Из условий (14) следует $\bar{A}_1\ ch(nh_1) = \ \bar{A}_2 ch(nh_2)$;

$\bar{A}_1 = -\frac{(\eta-1)e_z}{ch(nh_1)(\eta th(nh_2)+th(nh_1))}\,;$

$\bar{A}_2 = \ -\frac{(\eta-1)e_z}{ch(nh_2)(\eta th(nh_2) + th(nh_1))}.$

Компоненты напряженности электрического поля в областях 1 и 2 имеют вид

$E_{1xn} = \bar{A}_1 n\ sh\ (n(z + h_1))\ \sin(nx),$
$E_{1zn} = -\ \bar{A}_1 n\ ch\ (n(z + h_1))\ \cos(nx),$
$E_{2xn} = \bar{A}_2 n\ sh\ (n(z - h_2))\ \sin(nx),$
$E_{2zn} = -\bar{A}_2 n\ ch\ (n(z - h_2))\ \cos(nx).$

Продифференцировав по x динамическое условие (14) с учетом граничных условий и выражения v_{zn} из (17) , находим собственные числа исходной линейной краевой задачи

$v_n \ = \frac{k}{gn\ cth\ nh_1}\left[\frac{g}{k} + \sigma_c n^2 - \frac{n\sigma_{e_1}\varepsilon_2\eta(\eta-1)^2}{\eta\ th\ nh_2 + th\ nh_1}\right] (n = 1,2,3 \ldots).$

Затем будем искать решение нелинейной задачи при $\delta \neq 0$ в виде рядов по степеням малого параметра δ, такого что нулевой член этого ряда соответствует решению краевой задачи при $\delta = 0$[2]:

$$\xi = \sum_{j=0}^{\infty}\delta^j\xi_j\,, p = \sum_{j=0}^{\infty}\delta^j p_j\,, \vec{v} = \sum_{j=0}^{\infty}\delta^j\vec{v}_j, \vec{E}_1 = \sum_{j=0}^{\infty}\delta^j\overrightarrow{E_1}_j,$$

$$\vec{E}_2 = \sum_{j=0}^{\infty}\delta^j\overrightarrow{E_2}_j,\ \varphi_1 = \sum_{j=0}^{\infty}\delta^j\varphi_{1_j},\ (18)$$

$$\varphi_2 = \sum_{j=0}^{\infty}\delta^j\varphi_{2_j},\ v = v_n\left(1 + \sum_{j=0}^{\infty}\delta^j\theta_j\right)^{-1},$$

где n — натуральное число. Далее будем ограничиваться в рядах (18) тремя первыми слагаемыми, то есть рассматриваем решение задачи с точностью то третьего приближения.

Применяя в нелинейных граничных условиях (14) величины берутся на заранее неизвестной поверхности $z = \delta\xi(x)$. Перенесем граничные условия на поверхность $z = 0$. Для этого разложим величины в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$:

$f(x,\delta\xi) = f(x,0) + \partial f/\partial z\,|\delta\xi + 1/2\,\partial^2 f/\partial z^2|\delta^2\xi^2 + \ldots$ Получим:

$v_z = \ -\ d\xi/dx + \delta(v_x\, d\xi/dx - \xi\, dv_z/dz) + \ \delta^2\xi(dv_x/dz\, d\xi/dx - -1/2\,\xi\,\partial^2 v_z/\partial z^2);$
$e_z(1-\eta)\, d\xi/dx + E_{1x} - \eta E_{2x} =$
$= \delta\xi(\eta\,\partial E_{2x}/\partial z - \partial E_{1x}/\partial z) + \delta^2\xi^2/2\,(\eta\,\partial^2 E_{2x}/\partial z^2 - \partial^2 E_{1x}/\partial z^2);$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$E_{2z} - E_{1z} = \delta\left(\xi\frac{\partial E_{1z}}{\partial z} - \xi\frac{\partial E_{2z}}{\partial z} - E_{1x}\frac{d\xi}{dx} + E_{2x}\frac{d\xi}{dx}\right) +$$
$$+ \delta^2\xi(1/2\,\xi\,\partial^2 E_{1z}/\partial z^2 - 1/2\,\xi\,\partial^2 E_{2z}/\partial z^2 - \partial E_{1x}/\partial z\, d\xi/dx + +\partial E_{2x}/\partial z\, d\xi/dx); \text{(19)}$$
$$\varepsilon_2\sigma_{e_2}k\left\{-e_{zE_{2z}} + \delta\left[-e_z\xi\frac{\partial E_{2z}}{\partial z} + \frac{1}{2}(E_{1x}^2 - E_{1z}^2) +\right.\right.$$
$$\left.+2e_z E_{2x}\,d\xi/dx + (d\xi/dx)^2\right] + \delta^2\xi[-1/2\,e_z\xi\,\partial^2 E_{2z}/\partial z^2 + E_{2x}\,\partial E_{2x}/\partial z -$$
$$-E_{2z}\,\partial E_{2z}/\partial z + 2e_z\partial E_{2x}/\partial z\, d\xi/dx]\} - \varepsilon_1\sigma_{e_1}k\{-e_z E_{1z} +$$
$$+\delta\left[-e_z\xi\frac{\partial E_{1z}}{\partial z} + \frac{1}{2}({E^2}_{1x} - {E^2}_{1z}) + 2e_z E_{1x}\frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2\right] +$$
$$\left.+\delta^2\xi\left[-\frac{1}{2}e_z\xi\frac{\partial^2 E_{1z}}{\partial z^2} + E_{1z}\frac{\partial E_{1z}}{\partial z} + 2e_z\frac{\partial E_{1x}}{\partial z}\frac{d\xi}{dx}\right]\right\} -$$
$$-g\nu\left(p + \delta\xi\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2\xi^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) + g\xi = \sigma_c k\frac{d^2\xi}{dx^2}\left[1 - \frac{3}{2}\delta^2\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2\right].$$

Далее ряды (18) следует подставить в уравнения (10) и граничные условия (19), а также в условия на твердых обкладках конденсаторе, условия симметрии и периодичности. Приравнивая затем выражения при одинаковых степенях малого параметра в обеих частях равенств, находим уравнения для первого, второго и третьего приближений.

Тем самым находим выражение для фазовой скорости волны, которая зависит от квадрата её амплитуды, кроме прочих параметров, входящих в условие задачи. Фазовая скорость достигает минимума при некотором значении длины волны. А с ростом значения напряженности электрического поля частота волны с фиксированной длиной уменьшается и обращается в ноль при некотором значении напряженности электрического поля.

Литература:

1. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Издательствово Ленигр. ун-та, 1981. 196с.
2. Баринов В.А., Математическое моделирование магнитогидродинамических поверхностных волн. Саранск: Изд-во Морддов. Ун-та. 1991. 96с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735с.