ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Заметки о кубических динамических системах специального вида

Андреева Ирина Алексеевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент
Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого
Алексей Федорович Андреев, доктор физ.-мат. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет

Ключевые слова: *автономная динамическая система, преобразование Пуанкаре, особые точки, полиномы*

Рассмотрим семейство нормальных автономных динамических систем с полиномиальными правыми частями, представляющее собой совокупность всех систем вида

$$\frac{dx}{dt} = p_3(y - u_1 x)^{k_1}(y - u_2 x)^{k_2} \equiv X(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt} = c\,(y - q_1 x)(y - q_2 x) \equiv Y(x,y), \quad (1)$$

где $p_3, c, u_1, u_2, q_1, q_2 \in R, p_3 > 0, c > 0, u_1 < u_2, q_1 < q_2, u_i \neq q_j \; \forall\, i, j \in \{1,2\}, k_1, k_2 \in \{1,2\}, k_1 + k_2 = 3$.

Естественно и удобно различать два класса подобных систем, а именно: системы с $k_1 = 1, k_2 = 2$, образуют класс 1, системы же с $k_1 = 2, k_2 = 1$, образуют класс 2. Но ДЗ-преобразование [15, 16] (то есть двойная замена в (1)-системе: $(t, y) \to (-t, -y)$) преобразует произвольную (1)-систему в некоторую, строго говоря, отличную (1)-систему, внося в преобразуемую систему следующие изменения:

1) изменяются на противоположные знаки вещественных корней полиномов $P(u)$, $Q(u)$ данной системы, и вследствие этого также знаки членов ее ПКРQ (последовательности корней обоих данных полиномов, выписанных в порядке возрастания); 2) изменяется знак переменной t, а потому и направление движения с возрастанием t по любой траектории системы на обратное. Как показано в статьях [13, 16], системы класса 1 при ДЗ оказываются преобразованы в системы класса 2, и обратно. Поэтому в дальнейшем целесообразно изучать лишь (2, 2)-системы класса 1 (классификацию систем можно найти в [4, 5, 8, 12, 13, 15, 17]).

Выявив все различные фазовые портреты систем этого класса и построив их ДЗ-образы, мы получим все различные фазовые портреты (ФП) (2, 2)-систем класса 2.

Произвольная система этого семейства при ее записи в координатах Пуанкаре [1, 17] u, z, τ

$$u = \frac{y}{x}, z = \frac{1}{x}, \left(x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z}\right), dt = z^2 d\tau,$$

принимает вид:

$$\frac{du}{d\tau} = uP(u) + Q(u)z, \frac{dz}{d\tau} = -zP(u). \quad (2)$$

(2, 2) - семейство (1)-систем класса 1

Это семейство представляет собою совокупность всех (1)-систем вида

$$\frac{dx}{dt} = p_3(y - u_1 x)(y - u_2 x)^2 \equiv X(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt} = c\,(y - q_1 x)(y - q_2 x) \equiv Y(x,y), \quad (3)$$

где $p_3, c, u_1, u_2, q_1, q_2$ - те же, что и выше.

Первое преобразование Пуанкаре

$$x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z} \; \left(u = \frac{y}{x}, z = \frac{1}{x}\right)$$

преобразует произвольную систему этого семейства в систему [17, часть II, § 2], которая после замены времени $dt = z^2 d\tau$ принимает вид:

$$\frac{du}{d\tau} = -uP(u) + zQ(u),$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -zP(u),$$

где $P(u) \equiv X(1, u)$ и $Q(u) \equiv Y(1, u)$ − взаимно простые полиномы.

Общие свойства систем 2-семейства

Учитывая представление этих систем в приведенных выше видах,
находим, что любая из них обладает следующими свойствами:

1. Имеет особые точки: конечную O (0, 0) [2, 3, 6, 8]; бесконечно удаленные (БО-точки) [7, 13, 16, 17] $O_i\ (u_i, 0), i = \overline{0,2},\ u_0 = 0$.
2. Ее полиномы P, Q суть $P(u) \equiv X(1, u)$ и $Q(u) \equiv Y(1, u)$ [13, 17].
3. Она имеет одну из следующих последовательностей корней полиномов P, Q (ПКPQ) [5, 11, 12, 16]:

1) u_1, u_2, q_1, q_2;
2) u_1, q_1, u_2, q_2;
3) q_1, u_1, u_2, q_2;
4) u_1, q_1, q_2, u_2;
5) q_1, u_1, q_2, u_2;
6) q_1, q_2, u_1, u_2.

www.esa-conference.ru

Из пункта 3 следует, что 2-семейство распадается на 2_r-семейства, $r=\overline{1,6}$, для каждого из которых все его системы имеют одну и ту же ПКPQ: (ПКPQ)$_r$, где r —ее номер по приведенному выше перечню.

ДЗ-классификация 2_r − семейств дает: семейства 2_r, $r=\overline{1,4}$, ДЗ-независимы, а семейства 2_5 и 2_6 − ДЗ-взаимно обратны семействам 2_2 и 2_1 соответственно. Поэтому далее мы будем изучать сначала (поочередно) 2_r-семейства, $r=\overline{1,4}$, по программе исследования (1)-систем 0.5 [17, часть IV]. Затем мы изучим (параллельно) 2_r − семейства, r =5, 6, используя их ДЗ-связи с семействами 2_2 и 2_1 [9, 13, 14].

Литература:

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. // Москва: Наука. 1966. 586 с.
2. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. // Минск, «Вышэйшая школа». 1979. 136 с.
3. Андреев А.Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. // СПб, Издательство С.-Петербургского университета. 2003. 160 с.
4. Андреев А.Ф., Андреева И.А. Фазовые потоки одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре.IV_2.// Дифференциальные уравнения и процессы управления. [Электронный журнал]. 2010. № 4. С. 6-17. Http//www.math.spbu.ru/user/diffjournal.
5. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. // XXVIII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017). Сборник материалов международной конференции. 2017. С. 53-55.
6. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Исследование особой точки O (0, 0) широкого семейства кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 11 (33). С. 1-3.
7. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Бесконечно удаленные особые точки одного семейства кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. 2018. Т.1. № 1 (35). С. 1-3.
8. Андреев А.Ф., Андреева И.А. О поведении траекторий одного класса кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. №3 (25). С. 1-2.
9. Andreev A.F., Andreeva I.A. On limit and separatrix cycles of a certain quasiquadratic system. // Differential Equations.1997. V. 33. № 5. P. 702-703.
10. Андреев А.Ф., Андреева И.А., Детченя Л.В., Маковецкая Т.В., Садовский А.П. Нильпотентные центры кубических систем. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 8. С. 1003-1008.
11. Андреева И.А., Андреев А.Ф. К вопросу о картине траекторий еще одного семейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 9 (31). С. 1-2.
12. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Поведение траекторий нового семейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 6 (28). С. 1-2.
13. Андреева И.А., Андреев А.Ф. О методике и результатах построения фазовых портретов нового подсемейства динамических систем в круге Пуанкаре. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 5 (27). С. 5-6.
14. Andreev Alexey, Andreeva Irina. Investigation of a family of cubic dynamic systems. // Vibroengineering PROCEDIA. 2017. Vol. 15. P. 88-93.
15. Андреева И.А., Андреев А.Ф. О поведении траекторий одного класса кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. 2017. Т.1. № 3 (25). С. 1-2.
16. Андреева И.А., Андреев А.Ф. Методика исследования семейства кубических динамических систем. // Евразийское научное объединение. 2018. Т.1. № 2 (36). С. 5-7.
17. Андреев А.Ф. Андреева И.А. Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. I. // Вестник РАЕН. 2017. Т. 17. N 4. С. 8-18.